ADRIANA TURTOI

TEHNICĂ BOCHNER PE VARIETĂȚI

Editura Universității din București

ADRIANA TURTOI

TEHNICĂ BOCHNER PE VARIETĂȚI

Editura Universității din București

– 2002 –

Referenţi ştiinţifici: ***Prof. dr. Stere IANUŞ***
Conf. dr. Liviu ORNEA

Şos. Panduri 90-92, Bucureşti - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
TURTOI, ADRIANA
Tehnica Bochner pe varietăţi / Adriana Turtoi - Bucureşti : Editura Universităţii din Bucureşti, 2002
p. ; cm.
Bibliogr.
ISBN 973-575-629-3

51

Tiparul s-a executat sub cda 897/2002
la Tipografia Editurii Universităţii din Bucureşti

CUVÂNT ÎNAINTE

Cartea de faţă se adresează în primul rând studenţilor Facultăţii de Matematică ce manifestă interes pentru Geometrie cu conexiuni în Teoria operatorilor diferenţiali, Topologia algebrică şi diferenţială etc.

Cartea a fost concepută drept curs de două semestre pentru anii 5-6 Masterat. Am urmărit ca ea să fie cât mai accesibilă şi, ca urmare, cititorii avizaţi pot trece peste unele paragrafe.

Am dorit de asemenea să familiarizăm cititorul cu diverse tipuri de calcul. Fiind vorba de un curs, am considerat normal să nu expediem ca fiind "evidente" unele calcule ce nu pot fi găsite explicit în bibliografia consultată, cum ar fi, de exemplu, calculul spinorial.

Termenul de "tehnică Bochner" descrie o metodă iniţiată de S. Bochner de aproape 50 de ani pentru a studia obiecte geometrice (câmpuri Killing, forme armonice, câmpuri spinoriale armonice) date pe varietăţi Riemann compacte când se impun anumite condiţii formei de curbură Ricci sau operatorului de curbură. În esenţă, este vorba de aplicarea principiului maximului al lui E. Hopf pentru operatori eliptici, pe varietăţi compacte.

Tehnica Bochner şi-a dovedit pertinenţa încă din anul 1953, când, cu ajutorul ei, Kodaira a demonstrat celebra sa teoremă de anulare. Mai recent, s-au făcut progrese pentru aplicarea acestei tehnici şi în cazul necompact şi pentru a studia aplicaţii armonice între varietăţi Kähler.

Utilizarea formalismului Clifford simplifică expunerea unor rezultate de tip Bochner. Cititorul se poate convinge singur urmărind demonstraţia unor teoreme Bochner făcute cu ajutorul operatorului Laplace pe o varietate Riemann (cap. 1) respectiv cu ajutorul operatorului Dirac pe fibrarea Clifford asociată varietăţii Riemann considerate (cap. 7). Formula Weitzenböck pentru operatorul Laplace este înlocuită în cazul operatorului Dirac cu formula Bochner.

Există o justificare filozofică pentru utilizarea în geometria riemanniană a formalismului Clifford. Amintim că fiecărui spaţiu vectorial V i se asociază în mod natural algebra sa exterioară $\Lambda^* V$, asociere ce aplicată fibrării tangente a unei varietăţi diferenţiabile conduce la fibratul de Rham al formelor exterioare diferenţiabile. În mod asemănător, unui spaţiu vectorial V dotat cu o formă patratică Q i se asociază algebra Clifford $C(Q)$ ce conduce direct la fibrări vectoriale metrice. Când se aplică această asociere fibrării tangente a unei varietăţi Riemann, se obţine fibrarea algebrică Clifford. Ca fibrare vectorială (dar nu şi ca fibrare algebrică) ea este izomorfă cu fibrarea formelor exterioare. Totuşi, multiplicarea Clifford este mult mai bogată decât multiplicarea exterioară a formelor, deorece ea reflectă simetria internă ca şi identităţile de bază ale structurii Riemann.

Utilizând operatorul Atiyah-Singer se dau rezultate de tip Bochner şi pe fibrări spinoriale (cap. 8).

Geometria spinorială este strâns legată de geometria riemanniană. Conceptul de bază pentru definirea unei varietăţi spinoriale este unul de natură topologică. Ea este o varietate cu un grup structural simplu conex. Aceasta trebuie înţeles în sensul că pentru o varietate diferenţiabilă reală de dimensiune n fibrarea tangentă are grupul structural $Gl(n;\mathbf{R})$ şi dacă varietatea este orientabilă acest grup structural se reduce la componenta conexă a unităţii, $Gl(n;\mathbf{R})^+$. Varietatea ar fi spinorială dacă acest grup structural $Gl(n;\mathbf{R})^+$ ar putea fi "liftat" la grupul de acoperire universală $\widetilde{Gl(n;\mathbf{R})} \to Gl(n;\mathbf{R})^+$. Ar fi foarte bine, dar există o "mică" problemă ce constă în aceea că *grupul* $\widetilde{Gl(n;\mathbf{R})}$ *nu admite reprezentări finit dimensionale.*

Se trece atunci de la grupul $Gl(n;\mathbf{R})$ la subgrupul său compact maximal $O(n)$, varietatea fiind considerată riemanniană. Se cere de asemenea ca ea să fie şi orientabilă, ceeace face ca grupul structural al fibrării tangente să se reducă la $SO(n)$. Atunci, o structură spinorială va corespunde unei "liftări" a grupului structural la grupul universal de acoperire $Spin_n \to SO(n)$, ce nu va exista decât în anumite condiţii topologice impuse varietăţii Riemann orientabile considerate.

Am introdus în capitolul 6 noţiunea de fibrare Dirac, ce generalizează pe cele de fibrare Clifford şi de fibrare spinorială [18].

În capitolul final am prezentat unele elemente privind twistori şi spinori Killing ce sunt obiecte ale unei fibrări spinoriale, şi au variate aplicaţii, printre altele, pentru a studia unele proprietăţi geometrice ale varietăţii Riemann de bază.

Capitolele 3 şi 4 sunt de interes deosebit pentru cei ce vor să-si însuşească rapid cunoştinţe din domeniul algebrelor Clifford respectiv din cel al fibrărilor principale şi al conexiunilor pe fibrări. Fără o bună înţelegere a materialului cuprins în aceste capitole nu poate fi vorba de a pătrunde adevăratul sens al operatorului Dirac pe o fibrare Dirac (cap.6).

De un real folos ne-au fost unele cărţi apărute recent, cum ar fi [4], [8], şi care, prin conţinutul lor, ne-au confirmat că scopul propus de cursul de faţă este de actualitate.

Autorul mulţumeşte membrilor Seminarului Ştiinţific al Catedrei de Geometrie Complexă, Topologie şi Algebră Computaţională, condus de Prof. Dr. Stere Ianuş, seminar care a urmărit unele aspecte legate de studiul operatorului Dirac. În special, mulţumiri Conf. Dr. Liviu Ornea şi Lect. Dr. Victor Vuletescu cu care autorul a purtat multe discuţii legate de subiectul cărţii.

Adriana Turtoi
Bucureşti, decembrie 2001

1

Teoreme Bochner pe spaţii Riemann

Consideraţii generale

Pentru început, prezentăm o metodă de calcul utilizată deseori şi, în particular, în cazul tehnicii Bochner. În esenţă, pentru a verifica o identitate pe o varietate Riemann este suficient de a o verifica în fiecare punct p într-un sistem de coordonate sau într-un câmp de repere care să ofere cea mai mare simplificare. Vom căuta un sistem de coordonate sau un câmp de repere relativ la care simbolii Christoffel Γ^i_{jk} să fie nuli într-un punct p. Vom demonstra că, în anumite condiţii, un astfel de sistem de coordonate sau câmp de repere există.

Fie M cu metrica $g = <,>$ o varietate Riemann n - dimensională şi $\{x^1, ..., x^n\}$ un sistem de coordonate in jurul punctului $p \in M$. Fie $X_i = \partial/\partial x^i$ şi ∇ conexiunea Levi-Civita a metricii riemanniene $<,>$.

Definiţie. Un sistem de coordonate $\{x^1, ..., x^n\}$ astfel încât:

$$< X_i, X_j > (p) = \delta_{ij}, (\nabla_{X_i} X_j)(p) = 0 \tag{1.1}$$

se numeşte *sistem de coordonate normale în punctul p.*

Utilizând notaţia $< X_i, X_j >= g_{ij}$, condiţiile (1.1) se scriu:

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \ dg_{ij}(p) = 0 \tag{1.2}$$

În adevăr, deoarece ∇ este conexiune metrică, fiind conexiunea

Levi-Civita a metricii g, avem pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z ale varietăţii M identitatea

$$< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >= X < Y, Z > .$$

În particular, rezultă

$$< \nabla_{X_i} X_j, X_k > + < X_j, \nabla_{X_i} X_k >= X_i < X_j, X_k >$$
$$(\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}, i, j, k \in \{1, ..., n\},$$

deci, notând $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k, (\forall)\ i, j \in \{1, ..., n\}$, avem

$$< \Gamma_{ij}^s X_s, X_k > + < X_j, \Gamma_{ik}^s X_s >= X_i < X_j, X_k >,$$
$$(\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}$$

Ca urmare:

$$\Gamma_{ij}^s g_{sk} + \Gamma_{ik}^s g_{sj} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}. \tag{1.3}$$

Cum ∇ este şi simetrică, avem $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, ceea ce implică pentru orice indici $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j], (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$$

şi, ca urmare $(\Gamma_{ij}^s - \Gamma_{ji}^s) X_s = 0$, de unde

$$\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ji}^s, (\forall) i, j, s \in \{1, ..., n\}. \tag{1.4}$$

Din (1.3) şi (1.4) se deduce formula:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right), (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\} \tag{1.5}$$

unde $(g^{ij})_{ij}$ este inversa matricei $(g_{ij})_{ij}$.

Să demonstrăm acum echivalenţa condiţiilor (1.1) şi (1.2).

Arătam mai întâi că (1.1) implică (1.2). In adevăr

$$< X_i, X_j > (p) = \delta_{ij} \Longleftrightarrow g_{ij}(p) = \delta_{ij.}$$

A doua relaţie (1.1) se scrie $(\Gamma_{ij}^s X_s)(p) = 0$, deci $\Gamma_{ij}^s(p) = 0$, deoarece $\{X_1(p), ..., X_n(p)\}$ este reper în spaţiul tangent în punctul p la varietatea diferenţiabilă M, notat ca deobicei $T_p M$. Atunci, (1.3) implică oricare ar fi indicii $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ egalitatea $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}(p) = 0$, de unde a doua relaţie (1.2).

Reciproc, (1.2) implică (1.1), având in vedere (1.5).

Se ştie că există pe orice varietate riemanniană un sistem de coordonate normal într-un punct arbitrar fixat. [17]

Convenţie. În cele ce urmează, prin câmp de repere pe o varietate Riemann, vom înţelege întotdeauna un câmp de repere ortonormat.

Definitie. Un câmp de repere $\{V_1, ..., V_n\}$ definit într-o vecinătate a punctului $p \in M$, se numeşte *câmp normal de repere în punctul* $p \in M$ dacă şi numai dacă oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$ are loc egalitatea:

$$(\nabla_{V_i} V_j)(p) = 0 \tag{1.6}$$

În cele ce urmează, demonstrăm existenţa câmpurilor normale de repere.

Propoziţia 1. *Fie $\{v_1, ..., v_n\}$ un reper ortonormat din spaţiul tangent $T_pM, p \in M$. Există atunci $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp normal de repere în punctul $p \in M$, încât $V_i(p) = v_i$, oricare ar fi indicele $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demonstraţie. Există un câmp de repere ortonormat $\{W_1, ..., W_n\}$, definit într-o vecinătate a punctului $p \in M$ fixat, încât $W_i(p) = v_i, i \in \{1, ..., n\}$. Dacă ar exista şi un câmp normal de repere în punctul $p \in M$, cum acesta este de asemenea ortonormat, conform definiţiei, rezultă că ar exista şi funcţiile a_i^j, $i, j \in \{1, ..., n\}$, definite in jurul punctului p, încât matricea $a = (a_i^j)$ să fie matricea de trecere între reperele ortonormate $\{W_1, ..., W_n\}$ şi $\{V_1, ..., V_n\}$. Ca urmare, matricea a ar fi ortogonală şi oricare ar fi $i, j, \in \{1, ..., n\}$ ar rezulta:

$$V_i = a_i^s W_s, a_s^i a_s^j = a_i^s a_j^s = \delta_{ij} \tag{1.7}$$

unde $s \in \{1, ..., n\}$ este indice de sumare. In plus, din $V_i(p) = W_i(p) = v_i$, utilizând (1.7), deducem adică de unde:

$$a_i^s(p) = \delta_i^s, (\forall) i, s \in \{1, ..., n\}. \tag{1.8}$$

Pentru a demonstra concluzia lemei, este suficient să arătăm că există matricea cu elemente funcţii, $a = (a_i^j)_{ij}$, încât să fie satisfăcute condiţiile (1.7), (1.8).

Condiţia (1.6) ne dă, ţinând cont de (1.7), $\nabla_{a_i^s W_s}(a_j^s W_s)(p) = 0$. Echivalent, utilizând proprietăţile conexiunii liniare ∇, obţinem:

$$a_i^s(p) a_j^r(p) (\nabla_{W_s} W_r)(p) + a_i^s(p)(W_s(a_j^r) W_r)(p) = 0.$$

Cum însă $a_i^j(p) = \delta_i^j, (\forall)\ i, j \in \{1, ..., n\}$, deducem egalitatea

$$(\nabla_{W_i} W_j)(p) + (W_i(a_j^r) W_r)(p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Notăm acum:

$$\nabla_{W_i} W_j = \Gamma_{ij}^s W_s, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\} \tag{1.9}$$

Rezultă atunci, ecuaţia:

$$\Gamma^s_{ij}(p) + W_i(a^s_j)(p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\} \quad (1.10)$$

Reperul $\{W_1, ..., W_n\}$ fiind ortonormat, avem $< W_i, W_j >= \delta_{ij}, (\forall)$ $i, j \in \{1, ..., n\}$. Conexiunea ∇ fiind metrică rezultă

$$< \nabla_{W_i} W_j, W_k > + < W_j, \nabla_{W_i} W_k >= W_i \delta_{jk}, (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Echivalent, cu notaţia (1.9), avem

$$\Gamma^k_{ij} + \Gamma^j_{ik} = 0, (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Deci, oricare ar fi indicele $i \in \{1, ..., n\}$, matricea constantă $B_i = (\Gamma^k_{ij}(p))_{jk}$ va fi strâmb simetrică.

Se ştie că algebra Lie $o(n)$ a grupului ortogonal $O(n)$ este algebra matricelor antisimetrice de ordin n [27]. Din cele de mai sus, rezultă că oricare ar fi indicele $i \in \{1, ..., n\}$, matricea B_i este din $o(n)$.

Alegem acum un sistem de coordonate $\{x^1, ..., x^n\}$ în jurul punctului p considerat astfel încât $x^i(p) = 0$ si $W_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$. Rezultă că matricea $A = \exp(-B_s x^s)$ este ortogonală. Această matrice poate fi considerată ca matrice $(a^j_i)_{ij}$ ce verifică condiţiile (1.7), (1.8). Avem de asemenea $\frac{\partial A^s_j}{\partial x^i}(p) = -(B_i)^s_j = -\Gamma^s_{ij}(p)$ şi atunci ecuaţia (1.10) este satisfăcută.□

Observaţii.

1) Dacă $\{V_1, ..., V_n\}$ este câmp normal de repere în punctul $p \in M$, avem

$$[V_i, V_j](p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}. \quad (1.11)$$

In adevăr, ∇ fiind simetrică, avem $[V_i, V_j] = \nabla_{V_i} V_j - \nabla_{V_j} V_i$. In plus, cum $(\nabla_{V_i} V_j)(p) = 0$, rezultă (1.11).

2) Fie $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ câmpul dual de corepere al câmpului normal de repere în punctul $p \in M$, notat $\{V_1, ..., V_n\}$. Deci, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$, ω^i este o forma Pfaff locală, definită pe aceeasi vecinătate a punctului p ca şi $V_1, ..., V_n$ şi, în plus, oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$, are loc relaţia $\omega^i(V_j) = \delta^i_j$.

Este imediată egalitatea:

$$(\nabla_{V_i} \omega^j)(p) = 0. \quad (1.12)$$

În adevăr, avem formula:

$$\nabla_{V_i}(\omega^j \otimes V_k) = \nabla_{V_i} \omega^j \otimes V_k + \omega^j \otimes \nabla_{V_i} V_k \quad (1.13)$$

Atunci, ţinând cont de (1.6) şi de faptul că $\omega^j \otimes V_k = \omega^j(V_k) = \delta^j_k$ iar $\nabla_{V_i} \omega^j \otimes V_k = (\nabla_{V_i} \omega^j)(V_k)$, rezultă că $[(\nabla_{V_i} \omega^j)(V_k)](p) = 0$, de unde (1.12).

3) Notând, $\nabla_{V_i} V_j = \Gamma^k_{ij} V_k, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$, rezultă, utilizând (1.13) $\nabla_{V_i} \omega^j \otimes V_k = -\Gamma^j_{ik}$,de unde se deduce imediat relaţia:

$$\nabla_{V_i} \omega^j = -\Gamma^j_{ik} \omega^k. \tag{1.14}$$

4) Formula (1.14) ne arată că egalitatea $(\nabla_{V_i} \omega^j)(V_k) = \omega^j(\nabla_{V_i} V_k)$ este FALSĂ!

Fie acum M varietate Riemann de dimensiune n, orientabilă, cu o orientare dată. Notăm, în cele ce urmează, cu $\mathcal{A}^p(M)$ sau $\mathcal{A}^p$ spaţiul $p-$formelor pe M, iar cu $\mathcal{F}(M)$ spaţiul funcţiilor diferenţiabile reale definite pe M. Pe spaţiile de forme sunt definiţi operatori importanţi pentru cele ce urmează [10]. Aceştia sunt: *operatorul de diferenţiere exterioară* $d : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p+1}$, *operatorul Hodge* $\star$: $\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{n-p}$ şi *operatorul de codiferenţiere* $\delta : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p-1}$, astfel încât are loc formula:

$$\delta = (-1)^{np+n+1} \star d \star . \tag{1.15}$$

Amintim că operatorul δ este $\mathbf{R}$-liniar dar nu $\mathcal{F}(M)-$ liniar, în timp ce operatorul Hodge $\star$ este $\mathcal{F}(M)-$ liniar. Dacă $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ este un câmp de corepere de aceeaşi orientare cu orientarea fixată iniţial pe M, atunci

$$\star (\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p) = \omega^{p+1} \wedge ... \wedge \omega^n, \tag{1.16}$$

oricare ar fi $p \in \{1, ..., n\}$. Este de remarcat că varietatea diferenţiabilă M a fost presupusă orientabilă şi orientată tocmai pentru a putea defini operatorul Hodge $\star$.

Un alt operator ce va fi utilizat este *produsul interior*. El se defineste astfel: fie η o $p-$formă definită pe un deschis U al lui M şi X câmp de vectori definit pe U. Produsul interior $i(X) : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p-1}$ este dat oricare ar fi $\eta \in \mathcal{A}^p$ de formula:

$$(i(X)\eta)(Y_1, ..., Y_{p-1}) = \eta(X, Y_1, ..., Y_{p-1}) \tag{1.17}$$

oricare ar fi câmpurile de vectori $Y_1, .., Y_{p-1}$ definite pe U.

Urmărim să dăm expresia locală pentru operatorii d şi δ. Demonstrăm:

Propoziţia 2. *Se consideră* $\{V_1, ..., V_n\}$ *un câmp local de repere ortonormat şi* $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ *câmpul corespunzător de corepere dual. Au loc formulele:*

$$d = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \nabla_{V_i}, \delta = -\sum_{j=1}^{n} i(V_j) \nabla_{V_j}. \tag{1.18}$$

Demonstraţie. Pentru demonstrarea egalităţilor din formula (1.18), vom proceda urmărind două etape şi anume: a) Arătăm că membrul drept al egalităţii nu depinde de alegerea câmpului de repere $\{V_1, ..., V_n\}$; b) Alegem un punct arbitrar x din deschisul pe care este definit câmpul de repere dat. Demonstrăm că egalitatea este valabilă daca se înlocuieşte câmpul de repere $\{V_1, ..., V_n\}$, cu un câmp normal de repere în x sau cu câmpul de repere canonic corespunzător unui sistem de coordonate normal în x.

Din cele de mai sus şi din Propoziţia 1, rezultă egalitatea din enunţ. Acest mod de abordare va fi deseori utilizat şi pentru demonstrarea altor egalităţi.

Demonstrăm acum prima formulă (1.18). Notăm $d_0 = \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \nabla_{V_i}$ şi demonstrăm că $d = d_o$.

Fie $\{Y_1, ..., Y_n\}$ respectiv $\{\varphi^1, ..., \varphi^n\}$ un câmp ortonormat de repere şi coreperul său dual definite pe acelaşi deschis ca şi $\{V_1, ..., V_n\}$. Avem formulele de schimbare de reper (coreper) :

$$Y_i = a_i^j V_j, \varphi^i = b_j^i \omega^j \tag{1.19}$$

unde matricele de funcţii $a = (a_i^j), b = (b_i^j)$ sunt una inversa celeilalte şi ortogonale. Atunci:

$$\sum_{i=1}^n \varphi^i \wedge \nabla_{Y_i} = \sum_{i=1}^n [b_r^i \omega^r \wedge a_i^s \nabla_{V_s}] = \sum_{i=1}^n b_r^i a_i^s (\omega^r \wedge \nabla_{V_s}) = \sum_{r=1}^n \omega^r \wedge \nabla_{V_r}.$$

Fie x un punct fixat din domeniul de definiţie şi $\{x^1, ..., x^n\}$ sistem de coordonate normal în punctul x. Alegem $V_i = \partial/\partial x^i, i = 1, ..., n$. Ca urmare avem $\omega^i = dx^i, i = 1, ..., n$. Cum d şi d_0 sunt operatori $\mathbf{R}$−liniari, este suficient să se probeze egalitatea lor aplicându-i unei p−forme $\psi = f\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p, f \in \mathcal{F}(M)$. Cum $\{x^1, ..., x^n\}$ este sistem de coordonate normal în punctul x, avem $(\nabla_{V_i}\omega^j)(x) = 0$, oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Avem succesiv următoarele egalităţi:

$$d_0\psi = \textstyle\sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \nabla_{V_i}(\psi) =$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^n \omega^i \wedge V_i(f)\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p + \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge f\nabla_{V_i}(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p).$$

De unde, *în punctul* x deducem, având în vedere că ∇ acţionează ca o derivare pe produsul exterior:

$$d_0\psi = \sum_{i=1}^n V_i(f)\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p$$

Pe de altă parte, cum $V_i = \partial/\partial x^i, \omega^i = dx^i, i = 1, ..., n$, rezultă că:

$$d\psi = \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p + fd(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p). =$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^n V_i(f)\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p.$$

Deci, *în punctul* x, am demonstrat că $d = d_0$. Această egalitate poate fi demonstrată în fiecare punct x din deschisul considerat iniţial, deci prima egalitate (1.18) este demonstrată.

Demonstrăm acum cea de a doua egaliate (1.18) .

Fie $\{Y_1, ..., Y_n\}$ un câmp ortonormat de repere arbitrar. Avem formulele de schimbare de reper $Y_i = a_i^j V_j$ cu matricea $a = (a_i^j)_{ij}$ ortogonală. Deci:

$$\sum_{j=1}^n i(Y_j)\nabla_{Y_j} = \sum_{j,r,s=1}^n i(a_j^s V_s)\nabla_{a_j^r V_r} = \sum_{j,r,s=1}^n a_j^s a_j^r i(V_s)\nabla_{V_r} = \\ \sum_{r,s=1}^n \delta^{rs} i(V_s)\nabla_{V_r} = \sum_{r=1}^n i(V_r)\nabla_{V_r}.$$

De aci rezultă invarianţa expresiei $\delta_o = -\sum_{r=1}^n i(V_r)\nabla_{V_r}$ la schimbarea câmpului de repere ortonormat $\{V_1, ..., V_n\}$.

Alegem atunci un câmp de repere normal într-un punct x fixat, orientat ca şi varietatea Riemann orientabilă considerată M. Fie acesta $\{V_1, ..., V_n\}$ şi $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ câmpul de corepere dual corespunzător. Este suficient de probat că $\delta\psi = \delta_0\psi$ alegând $\psi = f\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p, f \in \mathcal{F}(M)$.

Ţinând cont de (1.17), deducem că:

$$\begin{aligned} \delta_0\psi &= -\sum_{j=1}^n (V_j f) i(V_j)(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p) = \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^j (V_j f)\omega^1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega^j} \wedge \omega^p, \end{aligned} \tag{1.20}$$

unde semnul $\widehat{\omega^j}$ arată că 1-forma ω^j este omisă din produsul exterior respectiv.

Pe de altă parte, din definiţie, avem (1.16), sau, mai general, oricare ar fi indicele $i \leq p$,

$$\star(\omega^i \wedge \omega^{p+1} \wedge ... \wedge \omega^n) = \epsilon\omega^1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega^i} \wedge ... \wedge \omega^p,$$

unde $\epsilon \in \{1, -1\}$, valoarea sa fiind stabilită încât, notând $\psi = \omega^i \wedge \omega^{p+1} \wedge ... \wedge \omega^n$, avem:

$$\psi \wedge *\psi = \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n.$$

In acest caz, deducem $\epsilon = (-1)^{(p+1)(n-p)+i-1}$.

Oricare ar fi indicii $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, avem:

$$d\omega^i(V_j, V_k) = \frac{1}{2}[V_j(\omega^i(V_k)) - V_k(\omega^i(V_j)) - \omega^i([V_j, V_k])]$$

ceea ce conduce, *în punctul* x, la $d\omega^i = 0$, utilizând (1.11).

Deci, având în vedere relaţia (1.15),

$$\delta\psi = (-1)^{np+n+1} \star d(f\omega^{p+1} \wedge ... \wedge \omega^n)$$

care ne dă, *în punctul* x, egalitatea:

$$\delta\psi = (-1)^{np+n+1} \star \sum_{i=1}^{n} V_i(f)\omega^i \wedge \omega^{p+1} \wedge ... \wedge \omega^n$$

sau, mai departe, tot *în punctul* x,

$$\delta\psi = \sum_{i=1}^{p}(-1)^i (V_i f)\omega^1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega^i} \wedge ... \wedge \omega^p \tag{1.21}$$

Comparând formulele (1.20), (1.21) deducem a doua egalitate (1.18), *în punctul* x. Ţinând acum cont de Propoziţia 1, deducem egalitatea respectivă.

Fie M varietate Riemann, orientabilă şi orientată. Operatorul

$$\Delta = d\delta + \delta d \tag{1.22}$$

se numeşte *operatorul Laplace sau laplacianul lui* M.

Exerciţii.

1. În spaţiul euclidian $\mathbf{R}^3$, cu orientarea dată de reperul canonic, se consideră formele Pfaff $\varphi = dx^1 - x^1dx^2$ şi $\psi = x^2dx^1 - dx^2$. Calculaţi $\Delta(\varphi \wedge \psi)$.

2. Fie M varietate Riemann şi $\{V_1, ..., V_n\}$, respectiv $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ un câmp de repere normal în $p \in M$ şi coreperul său dual. Calculaţi $d(\omega^i \wedge \omega^j)(p)$ unde i, j sunt doi indici distincţi fixaţi, $i, j \in \{1, ..., n\}$.

3. Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ respectiv $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ un câmp de repere normal în punctul x şi câmpul dual de corepere corespunzător. Arătaţi că, *în punctul* x, avem egalitatea:

$$i(V_j)\nabla_{V_i} = \nabla_{V_i} i(V_j) \tag{1.23}$$

Indicaţie. Din $\mathbf{R}$ - liniaritatea operatorilor ∇ şi $i(V_j)$ rezultă că este suficient să demonstrăm că (1.23) are loc, *în punctul* x, când aplicăm fiecare din operatorii $i(V_j)\nabla$ respectiv $\nabla_{V_i} i(V_j)$ unei $p-$forme $f\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^p, f \in \mathcal{F}(M)$.

Formule Weitzenböck

În cele ce urmează vom considera o varietate Riemann, orientabilă, cu o orientare dată M. Vom desemna prin $\mathcal{X}(M)$ algebra câmpurilor vectoriale pe M. Păstrăm notaţiile anterioare şi demonstrăm acum o formulă care dă expresia locală a operatorului Laplace Δ.

Teorema 3 (Prima formulă Weitzenböck) *Fie* $\{V_1, ..., V_n\}$ *respectiv* $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ *un câmp ortogonal de repere şi coreperul său dual. Are loc formula:*

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{V_i V_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j) R_{V_i V_j}, \tag{1.24}$$

unde am notat, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$:

$$\nabla^2_{XY} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}, R_{XY} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]},$$

respectiv operatorul de diferenţiere covariantă de ordin 2 şi operatorul de curbură corespunzători conexiunii Levi-Civita ∇ a varietăţii Riemann M.

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că membrul drept al egalităţii (1.24) nu depinde de câmpul de repere ortonormat $\{V_1, ..., V_n\}$. Fie $\{Y_1, ..., Y_n\}$ un alt câmp de repere ortonormat definit pe acelaşi deschis U ca şi $\{V_1, ..., V_n\}$. Notăm cu $\{\varphi^1, ..., \varphi^n\}$ câmpul de corepere dual corespunzător. Avem atunci formulele de schimbare de reper (1.19), unde matricele de funcţii $a = (a_i^j), b = (b_i^j)$ sunt una inversa celeilalte şi ortogonale. Ţinând cont de proprietăţile lui ∇, de faptul că matricea a este ortogonală şi că $R_{Y_i Y_j} = a_i^r a_j^s R_{V_r V_s}, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$, deducem invarianţa membrului drept al relaţiei (1.24) la schimbarea câmpului de repere.

Alegem acum un câmp de repere normal în punctul fixat x, notat $\{V_1, ..., V_n\}$. Rezultă că, *în punctul fixat* x, avem $\nabla^2_{V_i V_i} = \nabla_{V_i} \nabla_{V_i}$ iar $R_{V_i V_j} = \nabla_{V_i} \nabla_{V_j} - \nabla_{V_j} \nabla_{V_i}$, ţinând cont şi de relaţia (1.11). Atunci, *în punctul* x, rezultă următoarea expresie a membrului drept din relaţia (1.24):

$$-\sum_{i=1}^{n} \nabla_{V_i} \nabla_{V_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j)(-\nabla_{V_i} \nabla_{V_j} + \nabla_{V_j} \nabla_{V_i}).$$

În acelaşi timp, utilizând formulele (1.18) vom calcula expresia locală a operatorului Laplace Δ.

Avem mai întâi următoarea egalitate:

$$d\delta = -\sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge \nabla_{V_i}(i(V_j) \nabla_{V_j}).$$

În plus,

$$\delta d = -\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} i(V_j)[\nabla_{V_j}(\omega^i \wedge \nabla_{V_i})] =$$
$$-\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} i(V_j)[\nabla_{V_j} \omega^i \wedge \nabla_{V_i}] - \sum_{i,j=1}^{n} i(V_j)[\omega^i \wedge \nabla_{V_j} \nabla_{V_i}]$$

Aceste expresii locale ale compunerilor de operatori $d\delta$ respectiv δd, evaluate *în punctul* x, ne dau:

$$\Delta = d\delta + \delta d = -\sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge \nabla_{V_i}(i(V_j)\nabla_{V_j}) - \sum_{i,j=1}^{n} i(V_j)[\omega^i \wedge \nabla_{V_j}\nabla_{V_i}],$$

deoarece avem şi (1.12). Remarcăm că $i(V_j)$ este antiderivare şi, în acelaşi timp, $i(V_j)\omega^i = \delta^i_j$.

Ţinând cont şi de (1.23), rezultă *în punctul* x :

$$\Delta = -\sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j)\nabla_{V_i}\nabla_{V_j} - \sum_{i=1}^{n} \nabla_{V_i}\nabla_{V_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j)\nabla_{V_j}\nabla_{V_i}.$$

Deci, rezultă că, *în punctul* x, egalitatea (1.24) este adevărată.

Deoarece expresia din membrul drept al egalităţii (1.24) este invariantă la schimbarea câmpului de repere şi, în acelaşi timp, conform Propoziţiei 1, putem alege în fiecare punct x din deschisul considerat un câmp normal de repere, deducem că egalitatea (1.24) este adevărată.□

Corolar 4. *Expresia locală a laplacianului* Δ *pe funcţii şi pe* $n-$*forme* ($n = \dim M$) *este următoarea:*

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{V_iV_i} \tag{1.25}$$

Demonstraţie. Deoarece operatorul $R_{V_iV_j}$ este o derivare pe forme, deducem imediat $R_{V_iV_j}(1) = 0$. În plus, deoarece operatorul $R_{V_iV_j}$ este $\mathcal{F}(M)-$liniar, rezultă şi $R_{V_iV_j}(f) = 0$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M)$. Astfel, utilizând (1.24), rezultă că (1.25) este adevarată pentru funcţii.

Dacă φ este o $n-$ formă, atunci oricare ar fi indicii *distincţi* $i, j \in \{1, ..., n\}$ rezultă că $R_{V_iV_j}\varphi$ este de asemenea o $n-$ formă deoarece derivarea covariantă păstrează gradul unei forme. Ca urmare, există $f_{ij} \in \mathcal{F}(M)$ cu proprietatea că $R_{V_iV_j}\varphi = f_{ij}\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n$. Avem atunci :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j)R_{V_iV_j}\varphi = \sum_{i\neq j} \omega^i \wedge i(V_j)R_{V_iV_j}\varphi =$$
$$\sum_{i\neq j} f_{ij}\omega^i \wedge i(V_j)\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n = \sum_{i\neq j} f_{ij}\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega^j} \wedge ... \wedge \omega^n,$$

unde semnul $\widehat{\omega^j}$ indică lipsa formei ω^j din produsul exterior respectiv. Atunci:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j)R_{V_iV_j}\varphi = 0,$$

deoarece indicii i, j fiind distincţi, rezultă că $i \in \{1, ..., n\}\setminus\{j\}$ şi $\omega^i \wedge \omega^i = 0$. Deci formula 1.25 este valabilă şi pe $n-$ forme. □

Amintim că spaţiul $p-$formelor definite pe varietatea Riemann M este un fibrat vectorial euclidian, cu produsul scalar $<, >$ ce se defineşte local, utilizând câmpul local ortonormat de repere $\{V_1,...,V_n\}$, respectiv câmpul de corepere dual $\{\omega^1,...,\omega^n\}$, în modul următor. Dacă $\varphi,\psi\in\mathcal{A}^p(M)$, $\varphi=\sum_{i_1<...<i_p}\varphi_{i_1...i_p}\omega^{i_1}\wedge...\wedge\omega^{i_p}$, $\psi=\sum_{i_1<...<i_p}\psi_{i_1...i_p}\omega^{i_1}\wedge...\wedge\omega^{i_p}$, unde $\varphi_{i_1...i_p},\psi_{i_1...i_p}\in\mathcal{F}(M)$, atunci:

$$<\varphi,\psi>=\sum_{i_1<...<i_p}\varphi_{i_1...i_p}\psi_{i_1...i_p} \tag{1.26}$$

Exerciţii.

1) Cu notaţiile anterioare, arătaţi că expresia (1.26) nu depinde de câmpul local de repere (corepere) considerat. *Indicaţie.* Deoarece se aleg câmpuri de repere (corepere) ortogonale, rezultă că matricea de schimbare de reper este ortogonală. Se mai ţine cont de faptul că produsul exterior al unei forme cu ea însăşi este nul.

2) Cu notaţiile de mai sus, formula (1.26) este echivalentă cu formula:

$$<\varphi,\psi>=\sum_{\substack{i_1<...<i_p\\ j_1<...<j_p}}\varphi_{i_1...i_p}\psi_{j_1...j_p}\det(<\omega^{i_r},\omega^{j_s}>)_{r,s=1,...,p} \tag{1.27}$$

unde, prin definiţie, avem

$$<\omega^i,\omega^j>=\delta^{ij},(\forall)i,j\in\{1,...,n\}. \tag{1.28}$$

Dacă $\varphi\in\mathcal{A}^p(M)$, vom nota cu $|\varphi|^2=<\varphi,\varphi>$ patratul normei sale. Are loc:

Propoziţia 5. *Utilizând notaţiile anterioare, este adevărată egalitatea:*

$$-\Delta\mid\varphi\mid^2=2\sum_{i=1}^{n}\mid\nabla_{V_i}\varphi\mid^2+2<\varphi,\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_i}\varphi> \tag{1.29}$$

Demonstraţie. Se verifică, prin calcul direct, că membrul drept al relaţiei (1.29) nu depinde de câmpul de repere considerat. Lăsăm acest calcul ca exerciţiu. Fie atunci, $\{V_1,...,V_n\}$ un câmp normal de repere în punctul x fixat. Atunci, *în punctul* x, avem:

$$\begin{gathered}2\textstyle\sum_{i=1}^{n}\mid\nabla_{V_i}\varphi\mid^2+2<\varphi,\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_i}\varphi>=\\ 2\textstyle\sum_{i=1}^{n}\mid\nabla_{V_i}\varphi\mid^2+2<\varphi,\sum_{i=1}^{n}\nabla_{V_i}\nabla_{V_i}\varphi>\end{gathered}$$

Pe de altă parte, calculăm expresia pentru $-\Delta\mid\varphi\mid^2$, ţinând cont de formula (1.25). Obţinem, local, formula:

$$-\Delta\mid\varphi\mid^2=\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_i}\mid\varphi\mid^2 \tag{1.30}$$

Deoarece câmpul de repere este normal în x, *în punctul* x avem egalitatea:

$$-\Delta \mid \varphi \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{V_i} \nabla_{V_i} \mid \varphi \mid^2 \tag{1.31}$$

Fie $\varphi = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \varphi_{i_1 \ldots i_p} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p}$, deci $\mid \varphi \mid^2 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} (\varphi_{i_1 \ldots i_p})^2$. Ca urmare,

$$\nabla_{V_i} \mid \varphi \mid^2 = 2 \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \varphi_{i_1 \ldots i_p} V_i(\varphi_{i_1 \ldots i_p})$$

iar, *în punctul* x, avem din (1.12),

$$\nabla_{V_i} \varphi = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} V_i(\varphi_{i_1 \ldots i_p}) \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p}.$$

Ca urmare, *în punctul* x, este adevărată egalitatea: $\nabla_{V_i} \mid \varphi \mid^2 = 2 < \varphi, \nabla_{V_i} \varphi >$. Deci (1.31) se scrie $-\Delta \mid \varphi \mid^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \nabla_{V_i} < \varphi, \nabla_{V_i} \varphi >$, de unde:

$$-\Delta \mid \varphi \mid^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} < \nabla_{V_i} \varphi, \nabla_{V_i} \varphi > + 2 \sum_{i=1}^{n} < \varphi, \nabla_{V_i} \nabla_{V_i} \varphi >,$$

deci, *în punctul* x, avem egalitatea (1.29). În concluzie, egalitatea (1.29) este valabilă în orice punct x din deschisul considerat (vezi şi explicaţiile din finalul demonstraţiei teoremei 3).□

Definiţie. Fie $\varphi \in \mathcal{A}^p(M)$. Vom spune că φ este *formă armonică* daca φ este soluţie a *ecuaţiei Laplace:*

$$\Delta \varphi = 0$$

Teorema 6. (A doua formulă Weitzenböck) *Cu notatiile anterioare, dacă φ este o formă armonică, atunci:*

$$-\Delta \mid \varphi \mid^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \mid \nabla_{V_i} \varphi \mid^2 - 2 < \varphi, \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j) R_{V_i V_j} \varphi > \tag{1.32}$$

Demonstaţie. Utilizând prima formulă Wetzenböck (1.24), deducem din faptul că φ este formă armonică:

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{V_i V_i} = - \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j) R_{V_i V_j}$$

şi atunci formula (1.29) se scrie sub forma (1.32).□

Pentru obţinerea unor rezultate de tip Bochner, este util de introdus forma patratică în φ, notată $F(\varphi)$ şi definită prin formula:

$$F(\varphi) = < \varphi, \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i \wedge i(V_j) R_{V_i V_j} \varphi > . \tag{1.33}$$

Importanţa formei patratice F va rezulta ulterior. Dacă, în anumite condiţii, $F(\varphi) \leq 0$ şi φ este o formă armonică, atunci a doua formulă Weitzenböck (1.32) implică $-\Delta \mid \varphi \mid^2 \geq 0$, concluzie cu consecinţe foarte interesante ce vor fi examinate mai jos.

Informaţii interesante despre $F(\varphi)$ se obţn considerând tensorul Ricci, notat Ric, a cărui exprimare locală este:

$$Ric(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} < R_{X V_i} Y, V_i >, (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M), \tag{1.34}$$

unde $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp ortonormat de repere pe un deschis al varietăţii riemanniene M.

Amintim că, în cazul în care X este un câmp *unitar* de vectori, atunci $Ric(X, X)$ desemnează curbura Ricci în direcţia câmpului vectorial X.

Este util să mai amintim că oricărei forme Pfaff φ îi corespunde un câmp vectorial dual, notat de obicei $\varphi^{\#}$. Acest câmp se obţine astfel: dacă forma Pfaff φ se exprimă local sub forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \omega^i \tag{1.35}$$

atunci

$$\varphi^{\#} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i V_i \tag{1.36}$$

unde $\{V_1, ..., V_n\}$ respectiv $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ reprezintă un câmp de repere respectiv câmpul său dual de corepere. Are loc:

Propoziţia 7. *Dacă $\varphi^{\#}$ este câmpul vectorial dual al formei Pfaff φ, atunci*

$$F(\varphi) = -Ric(\varphi^{\#}, \varphi^{\#}). \tag{1.37}$$

Demonstraţie. Fie $\{V_1, ..., V_n\}$, respectiv $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ un câmp de repere, respectiv câmpul său dual de corepere şi φ forma Pfaff (1.35). Notând

$$R_{V_i V_j} V_k = R^s_{kij} V_s \tag{1.38}$$

se deduce, prin calcul direct din proprietăţile conexiunii ∇ şi din (1.14) că:

$$R_{V_iV_j}\omega^k = -R^k_{sij}\omega^s \tag{1.39}$$

Calculăm acum, având în vedere exprimarea locală (1.35) a formei φ :

$$\begin{gathered} i(V_j)R_{V_iV_j}\varphi = \varphi_k i(V_j)R_{V_iV_j}\omega^k = \\ = -\varphi_k R^k_{sij} i(V_j)\omega^s = -\delta^s_j \varphi_k R^k_{sij} = -R^k_{jij}\varphi_k \end{gathered}.$$

Rezultă:

$$F(\varphi) = - < \sum_{s=1}^{n} \varphi_s\omega^s, \sum_{i,j,k=1}^{n} \omega^i \wedge R^k_{jij}\varphi_k > .$$

Deoarece $R^k_{jij}\varphi_k$ este funcţie, deducem:

$$\begin{gathered} F(\varphi) = -\sum_{i,j,k,s=1}^n R^k_{jij}\varphi_k\varphi_s < \omega^s, \omega^j >= -\sum_{i,j,k=1}^n R^k_{jij}\varphi_i\varphi_k = \\ = -\sum_{i,j,k=1}^n \varphi_i\varphi_k < R_{V_iV_j}V_j, V_k >= \sum_{i,j,k=1}^n \varphi_i\varphi_k < R_{V_iV_j}V_k, V_j >= \\ = \sum_{j=1}^n < R_{\varphi^\# V_j}\varphi^\#, V_j >= -Ric(\varphi^\#, \varphi^\#). \end{gathered}$$

Rezultate de tip Bochner

Rezultatele din acest paragraf depind de aplicarea *principiului maximului al lui Hopf* [32]. Fie P un *operator eliptic*, fără termeni constanţi, definit pe o mulţime deschisă $U \subseteq \mathbf{R}^n$ prin:

$$P = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

unde a^{ij}, a^i sunt funcţii de clasă $C^\infty(\forall)$ $i, j \in \{1, ..., n\}$ şi matricea $(a^{ij}(x))_{ij}$ este pozitiv definită oricare ar fi punctul $x \in U$.

Condiţia ca P să nu conţină termeni constanţi este evident independentă de alegerea sistemului de coordonate. Această condiţie este echivalentă cu proprietatea $Pf = 0$, oricare ar fi funcţia constantă f.

Principiul maximului al lui Hopf afirmă că, fiind dat operatorul eliptic P, definit pe deschisul U din $\mathbf{R}^n$, condiţia $Pf \geq 0$ implică proprietatea funcţiei f de clasă C^∞ de a fi constantă sau de a nu avea puncte de maxim în interiorul deschisului U.

Principiul maximului al lui Hopf se poate aplica, în particular, opusului ca semn al operatorului Laplace, $-\Delta$, când acţionează pe funcţii cu valori reale, definite pe o varietate Riemann orientabilă. Evident $-\Delta$ este un operator eliptic, cum se vede din exprimarea sa locală, pe funcţii, dată în corolarul 4.

O funcţie f cu proprietatea $-\Delta f \geq 0$ se numeşte *subarmonică*. Principiul maximului al lui Hopf ne permite să tragem următoarea concluzie ce va fi utilizată deseori:

Concluzie *O funcţie subarmonică neconstantă, definită pe un deschis al unei varietăţi Riemann, nu are puncte interioare de maxim. Dacă varietatea este compactă, orice funcţie subarmonică definită pe varietate este constantă (varianta ca ea să nu aibă puncte interioare de maxim fiind exclusă deoarece varietatea este compactă).*

Vom utiliza pe viitor urmatoarea terminologie. Vom spune că o funcţie cu valori reale, definită pe o varietate (respectiv un câmp tensorial dublu covariant, simetric) este *quasi-pozitivă* (este *quasi-pozitiv)* dacă şi numai dacă valoarea sa în orice punct din domeniul de definiţie este ≥ 0 (respectiv valoarea sa în orice punct din domeniul de definiţie este o formă biliniară, simetrică, semi-definită), dar există un punct în care valoarea sa este > 0 (respectiv există un punct în care valoarea sa este o formă biliniară, simetrică, pozitiv definită). Vom extinde această definiţie şi în alte cazuri. Vom spune, de exemplu, că o varietate Riemann are curbura secţională quasi-pozitivă dacă şi numai dacă curbura secţională este ≥ 0 în orice punct, dar există un punct în care ea este strict pozitivă.

Are loc:

Teorema 8. *Fie M o varietate Riemann, orientabilă, compactă, cu curbura Ricci nenegativă. Atunci orice formă Pfaff armonică pe M este paralelă. Daca curbura Ricci este quasi-pozitivă, atunci orice formă Pfaff armonică pe M este nulă.*

Demonstraţie. Fie φ o formă Pfaff armonică ce se exprimă local prin formula (1.35), utilizând notaţiile anterioare. Din formulele (1.32), (1.37) deducem:

$$-\Delta \mid \varphi \mid^2 = 2\sum_{i=1}^{n} \mid \nabla_{V_i}\varphi \mid^2 + 2Ric(\varphi^{\#}, \varphi^{\#}). \tag{1.40}$$

Din ipoteză, rezultă $Ric(\varphi^{\#}, \varphi^{\#}) \geq 0$, de unde $-\Delta \mid \varphi \mid^2 \geq 0$, deci $\mid \varphi \mid^2$ este o funcţie subarmonică. Utilizând faptul că M este varietate compactă, principiul maximului al lui Hopf arată că funcţia $\mid \varphi \mid^2$ este constantă, deci $\Delta \mid \varphi \mid^2 = 0$. Dar fiecare sumant din membrul drept al relaţiei (1.40) este nenegativ. Atunci: $\mid \nabla_{V_i}\varphi \mid^2 = 0$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$ şi $Ric(\varphi^{\#}, \varphi^{\#}) = 0$. Urmează $\nabla_{V_i}\varphi = 0$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$, deci φ este formă paralelă.

Presupunând că există un punct x în care forma patratică Ric este pozitiv definită, deducem că $Ric(\varphi^{\#}(x), \varphi^{\#}(x)) = 0$ implică $\varphi^{\#}(x) = 0$, sau, echivalent $\varphi(x) = 0$. Cum φ este formă Pfaff paralelă, rezultă $\varphi = 0$.□

Rezultă imediat prin calcul, că orice formă paralelă este armonică. Concluzia teoremei 8 ne arată că pe o varietate Riemann, orientabilă, compactă M, cu curbura Ricci nenegativă, spaţiul formelor armonice coincide cu spaţiul formelor paralele. Spaţiul formelor armonice se identifică, conform teoremei Hodge, cu primul grup de coomologie de

Rham, $H^1(M, \mathbf{R})$, a cărui dimensiune este primul număr Betti $b_1(M)$. Deci, pe o varietate orientabilă, compactă, cu curbura Ricci nenegativă, primul număr Betti $b_1(M)$ coincide cu dimensiunea distribuţiei maximale de câmpuri paralele pe M. De aci, în ipotezele teoremei 8, $b_1(M) \leq \dim M$, egalitatea fiind atinsă pe toruri plate.

Există preocupări pentru generalizarea teoremei 8. Gromov a pus problema de a studia stabilitatea condiţiei "$Ric(M) \geq 0 \Longrightarrow b_1(M) \leq \dim M$ " la perturbaţii ale metricei. Mai precis, dacă M este varietate compactă, există o constantă $\epsilon > 0$, suficient de mică, cu proprietatea $Ric(M) \geq -\epsilon$ să implice $b_1(M) \leq \dim M$? Oricum, ne putem asigura că fiind dată varietatea Riemann M, cu metrica sa G, există o perturbaţie a metricei G, anume $g = \lambda G, \lambda > 0$, cu proprietatea că $Ric(g) \geq -\epsilon$, unde ϵ este o constantă pozitivă dată. [12]

Teorema 8 va fi demonstrată şi în capitolul 7, utilizându-se identitatea lui Bochner pentru operatorul Dirac.

Pentru a da un nou rezultat ce ilustrează tehnica Bochner pe o varietate Riemann orientabilă M, să amintim că un câmp de vectori X se numeşte *câmp Killing* dacă şi numai dacă $L_X g = 0$, unde $g =<,>$ este metrica iar L este derivata Lie.

Amintim că derivata Lie L are următoarele proprietăţi:

a) $L_X f = Xf$, oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $f \in \mathcal{F}(M)$;

b) $L_X Y = [X, Y]$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$;

c) L_X se comportă ca o derivare pe produse tensoriale;

d) L_X comută cu contracţia.

Vom deduce unele identităţi utlile pentru teorema ce urmează. Oricare ar fi $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ avem:

$$L_X(g \otimes Y \otimes Z) = L_X g \otimes Y \otimes Z + g \otimes [X, Y] \otimes Z + g \otimes Y \otimes [X, Z].$$

Daca presupunem că X este câmp Killing, deducem:

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]). \tag{1.41}$$

In continuare, deoarece conexiunea Levi-Civita ∇ are torsiunea nulă, oricare ar fi $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, avem:

$$[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \tag{1.42}$$

şi (1.41) se scrie:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(Y, \nabla_Z X).$$

Cum însă conexiunea ∇ este metrică, deci:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

deducem, oricare ar fi câmpul Killing X şi oricare ar fi $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, egalitatea:

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \tag{1.43}$$

Teorema 9. *Pe o varietate Riemann, orientabilă, compactă, cu curbura Ricci nepozitivă, orice câmp Killing este paralel. Dacă, în plus, curbura Ricci este quasi-negativă, atunci orice câmp Killing este nul.*

Demonstraţie. Fie X un câmp Killing. Păstrând notaţiile anterioare, să considerăm $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp ortonormal de repere pe un deschis $U \subseteq M$. Vom arăta că pe U are loc egalitatea:

$$< \sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{V_i V_i} X, X >= -Ric(X, X). \tag{1.44}$$

Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea faptului ca ambii membri ai egalităţii (1.44) sunt invarianţi la schimbarea câmpului de repere $\{V_1, ..., V_n\}$. Utilizând această proprietate, putem să alegem un câmp de repere $\{V_1, ..., V_n\}$ care să fie normal într-un punct x arbitrar fixat din deschisul U.

Atunci, *în punctul* x, avem egalitatea:

$$< \nabla^2_{V_i V_i} X, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_{V_i} X, X >$$

care ne dă, tot *în punctul* x, utilizând (1.42):

$$< \nabla^2_{V_i V_i} X, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_X V_i, X > + < \nabla_{V_i} [V_i, X], X > .$$

Conexiunea fiind metrică rezultă, în continuare, tot *în punctul* x :

$$\begin{aligned} < \nabla^2_{V_i V_i} X, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_X V_i, X > +V_i < [V_i, X], X > - \\ - < [V_i, X], \nabla_{V_i} X > . \end{aligned}$$

Se folosesc succesiv proprietăţile (1.41), (1.43) şi faptul că ∇ este o conexiune metrică. Rezultă, *în punctul* x, egalităţile succesive:

$$\begin{aligned} &< \nabla^2_{V_i V_i} X, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_X V_i, X > - < [V_i, X], \nabla_{V_i} X > - \\ &-V_i X < V_i, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_X V_i, X > + < \nabla_{[V_i, X]} X, V_i > - \\ &-V_i X < V_i, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_X V_i, X > +[V_i, X] < X, V_i > - \\ &- < X, \nabla_{[V_i, X]} V_i > -V_i X < V_i, X > . \end{aligned}$$

În continuare, din (1.42), *în punctul* x, este adevărată egalitatea:

$$\begin{aligned} < \nabla^2_{V_i V_i} X, X >=< \nabla_{V_i} \nabla_X V_i, X > - \\ -X V_i < X, V_i > - < X, \nabla_{[V_i, X]} V_i > . \end{aligned}$$

Deci, deoarece din (1.43) avem $<\nabla_{V_i}X, V_i>= 0$ şi conexiunea este metrică, *în punctul* x, rezultă:

$$\begin{gathered} < \textstyle\sum_{i=1}^n \nabla^2_{V_iV_i}X, X >= \\ \textstyle\sum_{i=1}^n(< \nabla_{V_i}\nabla_X V_i, X > -X < X, \nabla_{V_i}V_i > - < X, \nabla_{[V_i,X]}V_i >) = \\ = \textstyle\sum_{i=1}^n(< \nabla_{V_i}\nabla_X V_i, X > - < X, \nabla_X\nabla_{V_i}V_i > - < X, \nabla_{[V_i,X]}V_i >= \\ = \textstyle\sum_{i=1}^n < R_{V_iX}V_i, X >= \sum_{i=1}^n < R_{XV_i}X, V_i >= -Ric(X, X). \end{gathered}$$

Deci, egalitatea (1.44) este adevărată în punctul x, arbitrar fixat, de unde deducem valabilitatea sa în orice punct al deschisului U.

Din Propoziţia 5, formulele (1.29) şi (1.44), deducem imediat:

$$-\Delta \mid X \mid^2= 2\sum_{i=1}^n \mid \nabla_{V_i}X \mid^2 -2Ric(X, X), \qquad (1.45)$$

unde, prin abuz de notaţie, am desemnat tot prin X forma Pfaff având exprimarea locală $\sum_{i=1}^n X^i\omega^i$, dacă $X = \sum_{i=1}^n X^iV_i$.

Din ipoteză, $Ric(X, X) \leq 0$ şi atunci din (1.45) rezultă $-\Delta \mid X \mid^2\geq 0$, adică funcţia $|X|^2$este subarmonică. Principiul maximului al lui Hopf şi compacitatea varietăţii Riemann M conduc la $|X|^2= const.$ Ca urmare, $\Delta \mid X \mid^2= 0$ şi (1.45) ne dă, având în vedere pozitivitatea tuturor termenilor din membrul drept:

$$\mid \nabla_{V_i}X \mid^2= 0, Ric(X, X) = 0, (\forall)i \in \{1, ..., n\}.$$

Prima egalitate este echivalentă cu proprietatea câmpului Killing X de a fi paralel. Dacă forma patratică Ric este quasi-negativ definită, atunci există un punct $x \in U$ încât $Ric(X, X)(x) = 0$ implică $X(x) = 0$. Cum însă am arătat că X este câmp paralel, deducem $X = 0$.□

Teorema 9 se poate generaliza considerând în locul câmpurilor de vectori Killing câmpuri de vectori proiective sau conforme [7], [33].

Informaţii asupra spaţiului formelor de ordin superior, şi implicit asupra numerelor Betti corespunzătoare, oferă teorema Gallot-Meyer, ce o vom demonstra în încheierea acestui capitol. Pentru a putea urmări enunţul şi demonstraţia ei este util de făcut unele precizări.

Fie $<, >$ produsul scalar al spaţiul vectorial euclidian $\mathbf{R}^n$. Vom nota cu $\wedge^2\mathbf{R}^n$ algebra Lie a aplicaţiilor liniare antisimetrice definite pe $\mathbf{R}^n$. Această algebră este izomorfă cu $so(n)-$algebra Lie a grupului special ortogonal.

Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ un reper ortonormat al lui $\mathbf{R}^n$. Atunci $\{V_i \wedge V_j\}_{i<j}$ este o bază a algebrei Lie $\wedge^2\mathbf{R}^n$. Considerăm pe $\wedge^2\mathbf{R}^n$ produsul scalar $<, >$ definit pe baza $\{V_i \wedge V_j\}_{i<j}$ prin formula:

$$< V_i \wedge V_j, V_k \wedge V_l >= \begin{vmatrix} < V_i, V_k > & < V_i, V_l > \\ < V_j, V_k > & < V_j, V_l > \end{vmatrix} \qquad (1.46)$$

oricare ar fi indicii $i, j, k, l \in \{1, ..., n\}, i < j, k < l$. Din faptul că $< V_i, V_j >= \delta_{ij}, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}, i < j$ rezultă:

$$< V_i \wedge V_j, V_k \wedge V_l >= \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}, \tag{1.47}$$

deci $\{V_i \wedge V_j\}_{i<j}$ este o bază ortonormată a spaţiului vectorial euclidian $\wedge^2 \mathbf{R}^n$.

Vom desemna cu $J : \wedge^2\mathbf{R}^n \to so(n)$ izomorfismul canonic al celor două algebre Lie, izomorfism ce face să corespundă elementului $X \wedge Y \in \wedge^2\mathbf{R}^n$, aplicaţia liniară antisimetrică a lui $\mathbf{R}^n$, notată $J(X \wedge Y)$ şi definită prin formula:

$$J(X \wedge Y)(Z) =< X, Z > Y- < Y, Z > X, \tag{1.48}$$

oricare ar fi vectorul $Z \in \mathbf{R}^n$.

Fie acum M o varietate Riemann, de dimensiune n, cu metrica $g =<,>$. Considerând $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp ortonormat de repere pe un deschis U din M, rezultă că $\{V_i \wedge V_j\}_{i<j}$ este local un câmp de repere al varietăţii Riemann $\wedge^2 M$. Se defineşte operatorul de curbură $\mathcal{R} : \wedge^2 M \to \wedge^2 M$ care face să corespundă elementului $V_i \wedge V_j \in \wedge^2 M$ elementul $\mathcal{R}_{V_i \wedge V_j} \in \wedge^2 M$, prin formula:

$$< \mathcal{R}_{V_i \wedge V_j}, V_k \wedge V_l >=< R_{V_i V_j} V_k, V_l >, \tag{1.49}$$

oricare ar fi indicii $i, j, k, l \in \{1, ..., n\}, i < j, k < l$. Se extinde prin liniaritate definiţia (1.49), obtinându-se astfel proprietatea operatorului de curbură $\mathcal{R}$ de a furniza un endomorfism $\mathcal{R}\ (x)$ al spaţiului vectorial tangent $T_x M$, oricare ar fi $x \in U$.

Utilizând notaţia (1.38), formula (1.49) poate fi scrisă sub forma:

$$\mathcal{R}_{V_i \wedge V_j} = R^l_{kij} V_k \wedge V_l \tag{1.50}$$

Din proprietăţile bine cunoscute ale tensorului de curbură al varietăţii Riemann considerate M, rezultă că endomorfismul $\mathcal{R}(x)$ este simetric. În adevăr:

$$< \mathcal{R}_{V_k \wedge V_l}, V_i \wedge V_j >=< R_{V_k V_l} V_i, V_j > . \tag{1.51}$$

Comparând formulele (1.49) şi (1.51) rezultă:

$$< \mathcal{R}_{V_i \wedge V_j}, V_k \wedge V_l >=< \mathcal{R}_{V_k \wedge V_l}, V_i \wedge V_j > . \tag{1.52}$$

Este util de introdus de asemenea aplicaţia biliniară simetrică $Q : \wedge^2 M \otimes \wedge^2 M \to \mathcal{F}(M)$ dată prin formula:

$$Q(X \wedge Y, Z \wedge T) =< \mathcal{R}_{X \wedge Y}, Z \wedge T >, \tag{1.53}$$

oricare ar fi câmpurile vectoriale $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$. Având în vedere formula (1.49), rezultă:

$$Q(X \wedge Y, Z \wedge T) = < R_{XY}Z, T > . \qquad (1.54)$$

Mai departe, având în vedere formula (1.50), rezultă:

$$Q(V_i \wedge V_j, V_k \wedge V_l) = R^l_{kij}. \qquad (1.55)$$

Aplicaţia Q, ca şi aplicaţia $\mathcal{R}$, poartă numele de operator de curbură. Dacă forma biliniară simetrică Q este pozitiv definită vom spune ca M are operatorul de curbură pozitiv definit. Quasi-pozitivitatea, negativitatea etc. pentru operatorul de curbură se definesc analog.

Dacă varietatea diferenţiabilă M are curbura secţională pozitivă, rezultă $Q(X \wedge Y, X \wedge Y) > 0$, oricare ar fi câmpurile vectoriale $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Totuşi, proprietatea lui M de a avea curbura secţională pozitivă nu implică pozitivitatea lui Q, deoarece nu toate elementele din $\wedge^2 M$ sunt decompozabile ca $X \wedge Y, X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Elementele de aceasta formă generează peste $\mathcal{F}(M)$ pe $\wedge^2 M$.

Exerciţii.

1) Arătaţi că spaţiul proiectiv complex $P_n(\mathbf{C})$ cu metrica Fubini-Studi are curbura secţională pozitivă, dar operatorul său de curbură Q este pozitiv semi-definit, dar nu pozitiv-definit.

Fie $T : \wedge^2\mathbf{R}^n \to \wedge^2\mathbf{R}^n$ o aplicaţie liniară. Atunci se defineşte *transformarea Ricci a lui* T, notată $R(T)$, definită ca aplicaţie $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ şi dată prin:

$$< R(T)v, w > = -\sum_{i=1}^{n} < T(V_i \wedge v), V_i \wedge w >, \qquad (1.56)$$

unde $\{V_1, ..., V_n\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^n$.

Teorema 10 (Gallot-Meyer) *a) Fie M varietate Riemann orientabilă. Dacă operatorul de curbură Q este pozitiv semi-definit (este quasi-pozitiv definit), atunci forma patratică F, definită prin formula (1.33) este negativ semi-definită (este quasi-negativ definită).*

b) Fie M varietate Riemann, compactă, orientabilă de dimensiune n. Dacă operatorul de curbură Q este pozitiv semi-definit, atunci orice $p-$formă armonică este paralelă. Dacă operatorul de curbură Q este quasi-pozitiv, atunci nu există $p-$forme armonice nenule pe M, oricare ar fi $0 < p < n$ [9], [22].

Demonstraţie. Izomorfismul canonic $J : \wedge^2\mathbf{R}^n \to so(n)$ dat prin formula (1.48), se extinde în mod natural la izomorfismul $\rho : \wedge^2\mathbf{R}^n \to so(\wedge^p\mathbf{R}^n)$ prin:

$$\rho(A)(v_1 \wedge ... \wedge v_p) = \sum_{j=1}^{p} v_1 \wedge ... \wedge J(A)v_j \wedge ... \wedge v_p,$$

oricare ar fi $A \in \wedge^2\mathbf{R}^n, v_1 \wedge ... \wedge v_p \in \wedge^p\mathbf{R}^n$. Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea faptului că $\rho(A)$ este o aplicaţie liniară anti-simetrică a spaţiului vectorial $\wedge^p\mathbf{R}^n$, dotat cu produsul scalar euclidian $<,>$, definit astfel:

$$< v_1 \wedge ... \wedge v_p, w_1 \wedge ... \wedge w_p >= \det(< v_i, w_j >)_{ij}.$$

Remarcând că algebra Lie $so(\wedge^p\mathbf{R}^n)$ este izomorfă cu $\wedge^p\mathbf{R}^n \wedge \wedge^p\mathbf{R}^n$, considerăm $\rho : \wedge^2\mathbf{R}^n \to \wedge^p\mathbf{R}^n \wedge \wedge^p\mathbf{R}^n$. Fie $\rho^* : \wedge^p\mathbf{R}^n \wedge \wedge^p\mathbf{R}^n \to \wedge^2\mathbf{R}^n$ adjunctul lui ρ.

Aplicăm aceste consideraţii pe varietatea Riemann M, dată în enunţul teoremei. Avem aplicaţia $\rho\mathcal{R}\rho^{*:} \wedge^p M \wedge \wedge^p M \to \wedge^p M \wedge \wedge^p M$ şi transformarea sa Ricci $R(\rho\mathcal{R}\rho^{*:}) : \wedge^p M \to \wedge^p M$ (a se vedea formula (1.56)). Desemnăm cu $\varphi^{\#}$ câmpul tensorial antisimetric ce corespunde unei p- forme φ date. Se arată că:

$$- < R(\rho\mathcal{R}\rho^{*:})\varphi^{\#}, \varphi^{\#} >= F(\varphi) \tag{1.57}$$

oricare ar fi $p-$forma φ. Formula (1.57) a fost deja demonstrată pentru $p = 1$ deoarece, în acest caz, $\rho = Id$ şi transformarea Ricci a lui $\mathcal{R}$ este $R(\mathcal{R}) = Ric$. Deci, formula (1.37) este caz particular al formulei (1.57), pentru $p = 1$. Cazul general necesită calcule destul de dificile şi vom omite demonstraţia formulei (1.57). Vom face ulterior o demonstraţie completă a acestei teoreme, în capitolul 6, în contextul formalismului Clifford. Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp de repere ortonormat pe un deschis al lui M. Vom nota $V_I = V_{i_1} \wedge ... \wedge V_{i_p}, I = (i_1, ..., i_p), (\forall)i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\}, i_1 < ... < i_p$.

Utilizăm formula (1.57) pentru a demonstra punctul a) al teoremei. Avem deci:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= - < R(\rho\mathcal{R}\rho^{*:})\varphi^{\#}, \varphi^{\#} >= \\ &= - \textstyle\sum_I < (\rho\mathcal{R}\rho^*)(\varphi^{\#} \wedge V_I), \varphi^{\#} \wedge V_I >= \\ &= - \textstyle\sum_I < (\mathcal{R}\rho^*)(\varphi^{\#} \wedge V_I), \rho^*(\varphi^{\#} \wedge V_I) >= \\ &= - \textstyle\sum_I Q(\rho^*(\varphi^{\#} \wedge V_I), \rho^*(\varphi^{\#} \wedge V_I)). \end{aligned} \tag{1.58}$$

De aci rezultă *a)*.

Demonstrarea punctului *b)* al teoremei este simplă. Fie M varietate compactă şi φ o p- formă armonică, $1 \leq p \leq n$. Atunci (1.32) se scrie:

$$- \Delta \mid \varphi \mid^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \mid \nabla_{V_i}\varphi \mid^2 -2F(\varphi). \tag{1.59}$$

Dacă Q este pozitiv semi-definită, atunci, din *a)*, membrul drept al formulei (1.59) este ≥ 0, de unde $\mid \varphi \mid^2$ este funcţie subarmonică, deci constantă. Rezultă $\Delta \mid \varphi \mid^2 = 0$, deci, fiecare dintre termenii din membrul drept la formulei (1.59) fiind ≥ 0, deducem simultan:

$$\mid \nabla_{V_i}\varphi \mid^2 = 0, (\forall)i \in \{1, ..., n\}, F(\varphi) = 0. \tag{1.60}$$

Deducem $\nabla_{V_i}\varphi = 0, (\forall)i \in \{1, ..., n\}$. De aici rezultă că $p-$ forma φ este paralelă.

Fie $1 \leq p < n$. Considerăm acum operatorul de curbură Q quasi-pozitiv. Există atunci un punct x cu proprietatea că operatorul de curbură Q este pozitiv definit în acest punct. Din al doilea rând de formule (1.60), rezultă că $F(\varphi(x)) = 0$, deci $\varphi(x) = 0$. Cum $p-$ forma $\varphi, 1 \leq p < n$ este paralelă (din prima parte a demonstra ţiei), rezultă $\varphi = 0$. Aceste argumente nu pot fi utilizate pentru cazul $p = 0$ sau $p = n$, deoarece, pe funcţii şi pe $n-$ forme F se anulează.□

Operatorul de curbură Q a fost introdus din motive algebrice. Există preocuparea de a investiga semnificaţia sa geometrică. Este ştiut că pozitiv definirea sa implică pozitivitatea integrantului în formula Gauss - Bonnet.

Teorema 10 arată că în cazul în care Q este quasi-pozitiv definit, grupurile de coomologie ale varietăţii Riemann, compacte, orientabile, $n-$dimensionale M considerate sunt aceleaşi cu cele ale sferei unitate S^n. Rezultă că în cazul în care Q este quasi-pozitiv definit, varietatea Riemann, compactă, orientabilă, $n-$dimensională M este omoloagă cu sfera unitate S^n.

S-a pus problema naturală dacă o varietate Riemann, compactă, $n-$ dimensională, simplu conexă cu operatorul de curbură Q quasi-pozitiv definit nu este difeomorfă cu sfera S^n. Pentru dimensiunile $3, 4$ aserţiunea este adevărată. În dimensiuni mai mari, există, se pare, dificultăţi de natură algebrică.

Se ştie totuşi că o varietate Riemann, compactă, $n-$dimensională, simplu conexă cu operatorul de curbură Q quasi-pozitiv definit nu este homeomorfă cu sfera S^n.

Exerciţii

1) Să se scrie operatorii de curbură $\mathcal{R}$ şi Q ai sferei S^n.

2) Fie $f : M_1 \to M_2$ un difeomorfism între varietăţile Riemann M_1, M_2. Se spune, prin definiţie, că f este o transformare proiectivă dacă şi numai dacă f duce geodezice în geodezice. Mulţimea transformărilor proiective ale unei varietăţi Riemann M în ea însăşi este un grup Lie a cărui algebră Lie se identifică cu algebra câmpurilor de vectori pe M cu proprietatea de a avea grupul cu un parametru de difeomorfisme locale asociat format din proiectivităţi. Astfel de câmpuri de vectori se numesc *câmpuri proiective de vectori.*

Fie M o varietate Riemann, compactă, cu curbura Ricci ≤ 0.

Arătaţi că orice câmp proiectiv de vectori pe M este paralel. Mai mult, dacă curbura Ricci este quasi-negativă, orice câmp proiectiv de vectori este nul. *Indicaţie.* Se demonstrează o formulă analoagă cu (1.37). Se utilizează şi teorema 9.

2

Teoreme Bochner pe spaţii Kähler

Consideraţii generale

Amintim câteva rezultate algebrice ce sunt utile pentru studiul spaţiului tangent într-un punct la o varietate aproape complexă [10].

Fie V un spaţiu vectorial real, de dimensiune n. O *structură aproape complexă* J pe V este un endomorfism $J : V \to V$ cu proprietatea $J^2 = -Id$, unde $J^2 = J \circ J$. Orice spaţiu vectorial real V, dotat cu o structură aproape complexă J, este evident de dimensiune pară, $n = 2m$. În plus, mulţimea V poate fi dotată cu o structură de spaţiu vectorial complex, cu legea de înmulţire cu scalari definită mai jos. Oricare ar fi $\alpha = a + \mathbf{i}b, a, b \in \mathbf{R}$ şi oricare ar fi vectorul $v \in V$, avem

$$\alpha v = av + bJv. \tag{2.1}$$

Se arată imediat că există o bază a spaţiului vectorial *real* V, de forma $\{V_1, ..., V_m, JV_1, ..., JV_m\}$.

Dacă mulţimea V este considerată cu structura sa de spaţiu vectorial complex, cu legea de înmulţire cu scalari definită prin formula (2.1), atunci $Jv = \mathbf{i}v$, oricare ar fi vectorul $v \in V$. Dimensiunea lui V ca spaţiu vectorial *complex* este m.

Fie V un spaţiu vectorial complex. Atunci, ca spaţiu vectorial real, poate fi dotat cu o structură aproape complexă $J : V \to V$, prin formula $J(X) = \mathbf{i}X$, oricare ar fi $X \in V$.

Fie spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^n$. Oricare ar fi $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n, z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, x_k, y_k \in \mathbf{R}$, $k \in \{1, ..., n\}$, prin aplicaţia $\mathbf{C}^n \to \mathbf{R}^{2n}, (z_1, ..., z_n) \to (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ identificăm spaţiul vectorial real $\mathbf{C}^n$ cu spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^{2n}$. Se obţine o structură aproape complexă J pe spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^{2n}$, luând $J(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = (-y_1, ..., -y_n, x_1, ..., x_n), (\forall)\ (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$. Rezultă

$$J =^{not.} \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matricea asociată endomorfismului J în reperul canonic al spaţiului vectorial $\mathbf{R}^{2n}$.

Fie două spaţii vectoriale reale V şi V' dotate respectiv cu structurile aproape complexe J, respectiv J'. O aplicaţie liniară $f : V \to V'$ se numeşte *complexă* dacă şi numai dacă

$$f \circ J = J' \circ f. \tag{2.3}$$

Luând în consideraţie structura de spaţiu vectorial complex a lui V, respectiv V', indusă de structura aproape complexă J, respectiv J', avem $f(iX) = if(X)$, oricare ar fi $X \in V$. Deci f este aplicaţie liniară între spaţiile vectoriale complexe V şi V'.

Din relaţia (2.3), se deduce că grupul liniar complex $GL(n; \mathbf{C})$ se identifică cu grupul multiplicativ al matricelor reale, nedegenerate, de ordin $2n$ care comută cu matricea (2.2).

Fie V^* dualul spaţiului vectorial real V, dotat cu structura aproape complexă J. Pe V^* se introduce de asemenea o structură aproape complexă, ce se notează tot cu J, prin formula:

$$J\omega = \omega J, (\forall)\omega \in V^*. \tag{2.4}$$

Pe de altă parte, dacă V este un spaţiu vectorial real, fie complexificatul său $V^{\mathbf{C}}$ care, ca mulţime, este produsul cartezian VXV iar ca spaţiu vectorial complex are definită adunarea pe componente (utilizându-se pe fiecare componentă adunarea din V ca spaţiu vectorial real) şi produsul cu un scalar complex dat prin:

$$(a + \mathrm{i}b)(X, Y) = (aX - bY, aY + bX), (\forall)a, b \in \mathbf{R}, X, Y \in V.$$

Dacă spaţiul vectorial real V posedă structura aproape complexă J, atunci se poate defini endomorfismul, notat de asemenea J,

$$J : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}, J(X, Y) = (JX, JY), (\forall)(X, Y) \in V^{\mathbf{C}}.$$

Se obişnueşte deseori să se desemneze un element $(X, Y) \in V^{\mathbf{C}}$ prin $X + iY$ şi atunci, prin definiţie, avem

$$J(X + iY) = JX + iJY, (\forall)X + iY \in V^{\mathbf{C}}.$$

Endomorfismul J al spaţiului vectorial complex $V^{\mathbf{C}}$, obţinut astfel, are de asemenea proprietatea $J^2 = -Id$.

Fie spaţiul vectorial real V cu structura aproape complexă J. Punem problema găsirii vectorilor proprii şi valorilor proprii pentru endomorfismul J. Căutăm, deci, vectorii nenuli $X \in V$ cu proprietatea că există $\lambda \in \mathbf{R}$, încât $JX = \lambda X$. Rezultă $\lambda^2 + 1 = 0$, ecuaţie incompatibilă în corpul numerelor reale $\mathbf{R}$. Ca urmare, o structură aproape complexă J nu posedă vectori şi valori proprii. Dacă considerăm însă aceeaşi problemă pentru endomorfismul $J : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}$, atunci rezultă valorile proprii $\pm i$. Subspaţiile proprii corespunzătoare respectiv valorilor proprii $i, -i$ se notează $V^{1,0}$, respectiv $V^{0,1}$. Se obţine $V^{\mathbf{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$, unde:

$$V^{1,0} = \{Z \in V^{\mathbf{C}} \mid Z = X - iJX, X \in V\},$$
$$V^{0,1} = \{Z \in V^{\mathbf{C}} \mid Z = X + iJX, X \in V\}.$$

Dacă se defineşte aplicaţia liniară, numită conjugare, $V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}, Z = X + iY \to \overline{Z} = X - iY$, atunci se observă că subspaţiile vectoriale $V^{1,0}$ şi $V^{0,1}$ sunt izomorfe prin conjugare.

Cum am observat mai sus, dualul V^* al spaţiului vectorial real V, dotat cu structura aproape complexă J, admite o structură aproape complexă, notată tot cu J şi definită prin (2.4). Subspaţiile proprii ale aplicaţiei liniare $J : V^{*\mathbf{C}} \to V^{*\mathbf{C}}$ corespunzătoare respectiv valorilor proprii $i, -i$ se notează de obicei $V_{1,0}, V_{0,1}$. Avem deci $V^{*\mathbf{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$, unde:

$$V_{1,0} = \{\alpha \in V^{*\mathbf{C}} \mid \alpha = \omega - iJ\omega, \omega \in V^*\}$$
$$V_{0,1} = \{\alpha \in V^{*\mathbf{C}} \mid \alpha = \omega + iJ\omega, \omega \in V^*\}.$$

Algebra exterioară $\mathcal{C}(V^{*\mathbf{C}})$ se descompune sub forma:

$$\mathcal{C}(V^{*\mathbf{C}}) = \sum_{\substack{r=0 \\ p+g=r}}^{\infty} \mathcal{C}^{p,q}(V^{*\mathbf{C}}).$$

Orice element din $\mathcal{C}^{p,q}(V^{*\mathbf{C}})$ este o aplicaţie $p + q-$ liniară, total antisimetrică, eventual nenulă pe $V^{1,0}X...XV^{1,0}XV^{0,1}X...XV^{0,1}$ (produsul cartezian are p mulţimi egale cu $V^{1,0}$ şi q mulţimi egale cu $V^{0,1}$) şi în rest nulă. Când spunem "*în rest nule*" trebuie să avem în vedere că o aplicaţie $p + q-$liniară, total antisimetrică, poate face parte din orice mulţime $\mathcal{C}^{p',q'}(V^{*\mathbf{C}})$, unde $p' + q' = p + q$. Un element din spaţiul vectorial $\mathcal{C}^{p,q}(V^{*\mathbf{C}})$ se numeşte o $(p, q)-$ formă.

Dacă $\{\theta^1, ..., \theta^m\}$ este bază a subspaţiului vectorial $V_{1,0}$, rezultă că $\{\overline{\theta^1}, ..., \overline{\theta^m}\}$ este o bază a subspaţiului vectorial $V_{0,1}$. Se obţine o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{C}^{p,q}(V^{*\mathbf{C}})$, considerând mulţimea $(p, q)-$ formelor:

$$\{\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_p} \wedge \overline{\theta^{j_1}} \wedge ... \wedge \overline{\theta^{j_q}}\}_{\substack{i_1<...<i_p \\ j_1<...<j_q}}.$$

Un produs scalar h, definit pe spaţiul vectorial real V, dotat cu structura aproape complexă J, se numeşte *produs scalar hermitian* dacă şi numai dacă $h(X,Y) = h(JX,JY), (\forall)X,Y \in V$.

Este un simplu exerciţiu de algebră demonstrarea faptului că există pentru orice produs scalar hermitian un reper ortonormat de forma $\{X_1, ..., X_m, JX_1, ..., JX_m\}$, unde $\dim V = n = 2m$. Într-un astfel de reper, matricea asociată endomorfismului J este de forma (2.2) iar h are forma canonică:

$$h(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}(X^iY^i + X'^iY'^i),$$

dacă $X = \sum_{i=1}^{m}(X^iX_i + X'^iJX_i), Y = \sum_{i=1}^{m}(Y^iX_i + Y'^iJX_i)$.

Fie h un produs scalar hermitian al spaţiului vectorial real V, cu structura aproape complexă J. Se extinde prin $\mathbf{C}$-biliniaritate definiţia lui h, pe complexificatul $V^{\mathbf{C}}$ al lui V, obţinându-se un produs scalar, notat tot cu h, cu următoarele proprietăţi:

$$\begin{gathered} h(Z,\overline{Z}) > 0, (\forall)Z \neq 0, \\ h(\overline{Z},\overline{W}) = \overline{h(Z,W)}, (\forall)Z,W \in V^{\mathbf{C}}, \\ h(Z,W) = 0, (\forall)Z,W \in V^{1,0}, \\ h(JZ,JW) = h(Z,W), (\forall)Z,W \in V^{\mathbf{C}}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Cu notaţiile anterioare, se introduce aplicaţia:

$$\varphi : VXV \to \mathbf{R},\ \varphi(X,Y) = h(X,JY). \tag{2.6}$$

Aceasta este o formă biliniară, antisimetrică, care se extinde prin $\mathbf{C}$-biliniaritate la spaţiul vectorial $V^{\mathbf{C}}$. În principiu, ar trebui ca $\varphi \in \mathcal{C}^{2,0}(V^{*\mathbf{C}}) \oplus \mathcal{C}^{0,2}(V^{*\mathbf{C}}) \oplus \mathcal{C}^{1,1}(V^{*\mathbf{C}})$; se arată imediat că $\varphi \in \mathcal{C}^{1,1}(V^{*\mathbf{C}})$, deci φ este o $(1,1)-$ formă.

Exerciţii.

1) Fie $\{Z_1, ..., Zm\}, \{\overline{Z_1}, ..., \overline{Z_m}\}$ o bază a subspaţiului vectorial $V^{1,0}$, respectiv baza corespunzătoare a subspaţiului vectorial $V^{0,1}$, obţinută prin conjugare. Fie $\{\theta^1, ..., \theta^m\}$, respectiv $\{\overline{\theta^1}, ..., \overline{\theta^m}\}$ dualele bazelor $\{Z_1, ..., Zm\}$ respectiv $\{\overline{Z_1}, ..., \overline{Z_m}\}$. Acestea din urmă sunt baze ale subspaţiilor vectoriale $V_{1,0}$, respectiv $V_{0,1}$. Notând $h_{i\overline{j}} = h(Z_i, \overline{Z_j})$, oricare ar fi indicii $i,j \in \{1, ..., m\}$, arătaţi că:

$$\varphi = -\mathbf{i} \sum_{j,k=1}^{m} h_{j\overline{k}}\theta^j \wedge \overline{\theta^k}.$$

Varietăţi aproape complexe

Vom face o trecere în revistă a unor proprietăţi şi definiţii ce sunt utile pentru scopul nostru. Unele dintre proprietăţi sunt date fără demonstraţie. Cititorul dornic să urmărească toate demonstraţiile le va putea găsi în [10] sau în volumul al doilea din [17]

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă, reală, cu proprietatea că posedă un câmp diferenţiabil de tensori de tip $(1,1)$, notat J, încât oricare ar fi $x \in M$, endomorfismul $J_x : T_xM \to T_xM$ are proprietatea $J_x^2 = -Id_x$. O astfel de varietate diferenţiabilă se numeşte *varietate cu structură aproape complexă sau varietate aproape complexă*, iar J se spune că este *structura sa aproape complexă.*

O varietate aproape complexă posedă o structură aproape complexă pe fiecare spaţiu tangent.

Amintim câteva proprietăţi ale varietăţilor aproape complexe.

Propoziţia 1.*Orice varietate aproape complexă este o varietate diferenţiabilă, de dimensiune pară şi orientabilă.*

Definiţie.O *varietate complexă de dimensiune* m este o varietate diferenţiabilă (spaţiu topologic, separat, Haussdorf), modelată pe $\mathbf{C}^m$, cu proprietatea că funcţiile sale de schimbare de coordonate sunt olomorfe.

Propoziţia 2.*Orice varietate complexă admite ca varietate diferenţiabilă reală o structură aproape complexă.*

Fără a face demonstraţia, este interesant de spus că notând $z^k = x^k + \mathbf{i}y^k, x^k, y^k \in \mathbf{R}, k = 1, ..., m$ un sistem de coordonate complexe pe varietatea complexă $m-$dimensională M, rezultă, prin definiţie, că varietatea diferenţiabilă reală $2m-$dimensională M admite sistemul de coordonate $(x^1, .., x^m, y^1, ..., y^m)$.

O structură aproape complexă J a varietăţii diferenţiabile reale $2m-$dimensionale M este dată de

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = -\frac{\partial}{\partial x^i}, (\forall)i = 1, ..., m.$$

Această structură aproape complexă se numeşte *structura canonică complexă* a varietăţii diferenţiabile reale provenită din varietatea complexă M.

O problemă naturală ce se pune este de văzut în ce condiţii o structură aproape complexă J pe o varietate diferenţiabilă reală M coincide cu cea provenită dintr-o eventuală structură de varietate complexă pe M. Aceasta revine la a găsi dacă există pe M un atlas cu proprietatea că matricea asociată endomorfismului $J_x : T_xM \to T_xM$, în raport cu reperul canonic al lui T_xM, este de forma (2.2), oricare ar fi $x \in M$. În acest caz, vom spune că *structura aproape complexă J este integrabilă* iar J se va numi *structură complexă.*

Definiţie Fie M şi M' varietăţi aproape complexe dotate respectiv cu structura aproape complexă J respectiv J'. O aplicaţie diferenţiabilă $f : M \to M'$ se numeşte *aproape complexă* dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia $f_* \circ J = J' \circ f_*$.

Propoziţia 3. *O aplicaţie diferenţiabilă $f : M \to M'$ între varietăţile complexe M şi M' este olomorfă dacă şi numai dacă este aproape complexă în raport cu structurile canonice complexe J, J' induse pe M respectiv M'.*

Fie acum M o varietate diferenţiabilă reală şi T_xM respectiv $T_x^{\mathbf{C}}M$ spaţiul tangent în punctul $x \in M$ respectiv complexificatul său. Elementele lui $T_x^{\mathbf{C}}M$ se numesc *vectori tangen ţi complecşi.*

Vom desemna prin $\mathcal{A}^r(M)$ respectiv $\mathcal{C}^r(M)$ inelul r-formelor diferenţiale exterioare pe M, cu valori reale, respectiv inelul $r-$formelor exterioare, obţinute prin complexificare, cu valori complexe.

Mai precis, $\omega \in \mathcal{C}^r(M)$ dacă şi numai dacă ω_x este aplicaţie liniară total antisimetrică:

$$\omega_x : T_x^{\mathbf{C}}MX...XT_x^{\mathbf{C}}M \to \mathbf{C}$$

oricare ar fi $x \in U$, U fiind o mulţime deschisă şi $T_x^{\mathbf{C}}M$ apărând de r ori în domeniul de definiţie al lui ω_x.

Dacă M este varietate aproape complexă, cu structura aproape complexă J, atunci avem descompunerea:

$$T_x^{\mathbf{C}}(M) = T_x^{1,0} \oplus T_x^{0,1}, \tag{2.7}$$

unde $T_x^{1,0}$, respectiv $T_x^{0,1}$ sunt subspaţiile proprii ale endomorfismului J_x corespunzătoare respectiv valorilor proprii $i, -i$. Vom nota:

$$\mathcal{C}(M) = \sum_{\substack{r=0\\p+q=r}}^{\infty} \mathcal{C}^{p,q}(M)$$

unde $\mathcal{C}^{p,q}(M)$ este spaţiul $(p,q)-$ formelor pe M sau spaţiul formelor de tip (p,q) pe M. Orice $(p,q)-$ formă este o $p+q-$formă din $\mathcal{C}^{p+q}(M)$ care este eventual nenulă pe p vectori din $T_x^{1,0}$ şi q vectori din $T_x^{0,1}$, dar *este nulă* în rest.

Pe $\mathcal{C}^{p,q}(M)$ se poate introduce un câmp local de repere, considerând $\{\theta^1, ..., \theta^m\}$ un câmp local de repere pentru $\mathcal{C}^{1,0}(M)$ şi, corespunzător, câmpul local de corepere $\{\overline{\theta^1}, ..., \overline{\theta^m}\}$ pentru $\mathcal{C}^{0,1}(M)$, unde $n = 2m = \dim M$. Avem astfel:

$$\{\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_p} \wedge \overline{\theta^{j_1}} \wedge ... \wedge \overline{\theta^{j_q}}\}_{\substack{1 \le i_1 < ... < i_p \le m\\ 1 \le j_1 < ... < j_q \le m}}$$

un câmp de repere pentru $\mathcal{C}^{p,q}(M)$.

Să observăm că diferenţiala exterioară $d\omega$ a unei $(p,q)-$ forme ω poate, în principiu, să fie din:

$$\mathcal{C}^{p+1,q}(M) \oplus \mathcal{C}^{p,q+1}(M) \oplus \mathcal{C}^{p-1,q+2}(M) \oplus \mathcal{C}^{p+2,q-1}(M).$$

Câmpul de vectori complex Z definit pe un deschis U al varietăţii aproape complexe M este complexificatul unui câmp de vectori pe U. El se va numi de tip $(1,0)$ (respectiv $(0,1)$) dacă şi numai dacă $Z_x \in T_x^{1,0}M$ (respectiv $Z_x \in T_x^{0,1}M$) oricare ar fi $x \in U$.

Avem următoarea:

Propoziţia 4. *Fie M o varietate aproape complexă cu structura aproape complexă J. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

i) Z, W câmpuri de tip $(1,0) \Longrightarrow [Z,W]$ este câmp de tip $(1,0)$;

ii) Z, W câmpuri de tip $(0,1) \Longrightarrow [Z,W]$ este câmp de tip $(0,1)$;

iii) $d\mathcal{C}^{1,0}(M) \subset \mathcal{C}^{2,0}(M) \oplus \mathcal{C}^{1,1}(M)$, $d\mathcal{C}^{0,1}(M) \subset \mathcal{C}^{0,2}(M) \oplus \mathcal{C}^{1,1}(M)$;

iv) $d\mathcal{C}^{p,q}(M) \subset \mathcal{C}^{p+1,q}(M) \oplus \mathcal{C}^{p,q+1}(M)$

v) Câmpul tensorial N - numit câmp Nijenhuis - definit prin:

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X,Y] \tag{2.8}$$

este nul.

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi că $i) \Longrightarrow ii)$.

Fie Z, W câmpuri vectoriale de tip $(0,1)$. Rezultă $\overline{Z}, \overline{W}$ câmpuri vectoriale de tip $(0,1)$. Mai mult, $\overline{[Z,W]} = [\overline{Z}, \overline{W}]$ este de asemenea câmp vectorial de tip $(1,0)$. Atunci, $[Z,W]$ va fi câmp vectorial de tip $(0,1)$.

Reciproc, $ii) \Longrightarrow i)$ se demonstrează analog.

Arătăm acum că $ii) \Longrightarrow iii)$. Fie ω o $1-$formă de tip $(1,0)$. Avem:

$$d\omega(Z,W) = Z\omega(W) - W\omega(Z) - \omega([Z,W]). \tag{2.9}$$

oricare ar fi câmpurile vectoriale complexe Z, W.

Dacă Z, W sunt câmpuri vectoriale de tip $(0,1)$, deoarece ω este presupusă de tip $(1,0)$, rezultă $\omega(Z) = \omega(W) = 0$ şi din $ii)$, $\omega([Z,W]) = 0$ deoarece şi câmpul vectorial $[Z,W]$ este de tip $(0,1)$. Formula (2.9) ne arată că $2-$forma complexă $d\omega$ se anulează pe câmpuri vectoriale de tip $(0,1)$. Rezultă $d\omega \in \mathcal{C}^{2,0}(M) \oplus \mathcal{C}^{1,1}(M)$. La fel, dacă ω este o $1-$formă de tip $(0,1)$.

Reciproc, $iii) \Longrightarrow ii)$. În adevăr, fie Z, W câmpuri vectoriale de tip $(0,1)$ arbitrare. Presupunând ω o $1-$formă de tip $(1,0)$, avem $\omega(Z) = \omega(W) = 0$. Din ipoteza $iii)$ $d\omega \in \mathcal{C}^{2,0}(M) \oplus \mathcal{C}^{1,1}(M)$, deci $d\omega(Z,W) = 0$. Formula (2.9) implică atunci $\omega([Z,W]) = 0$, deci $[Z,W]$ este câmp vectorial de tip $(0,1)$.

Să demonstrăm acum că $iii) \Longrightarrow iv)$. În adevăr, $\mathcal{C}^{p,q}(M)$ este generat local de $\mathcal{C}^{0,1}(M) \oplus \mathcal{C}^{1,0}(M) \oplus \mathcal{C}^{0,0}(M)$. De aci rezultă implicaţia cerută. Reciproca este evidentă.

Arătăm că $v) \Leftrightarrow i)$. Calculăm pentru oricare două câmpuri vectoriale $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ câmpul de vectori complex:

$$Z = [X - \mathrm{i}JX, Y - \mathrm{i}JY].$$

Obţinem:

$$Z = [X, Y] - [JX, JY] - \mathrm{i}([JX, Y] + [X, JY]).$$

Avem egalitatea:

$$Z + \mathrm{i}JZ = -N(X, Y) - \mathrm{i}JN(X, Y)$$

Rezultă următorul şir de afirmaţii echivalente, deoarece $X - \mathrm{i}JX, Y - \mathrm{i}JY$ sunt câmpuri vectoriale de tip $(1, 0)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$:

$$i) \Leftrightarrow Z \textit{ este de tip } (1,0) \Leftrightarrow$$
$$Z + \mathrm{i}JZ = Z + \mathrm{i}(\mathrm{i}Z) = 0 \Leftrightarrow N(X, Y) = 0. \square$$

Câmpul tensorial N al lui Nijenhuis are o mare importanţă pentru a studia integrabilitatea unei structuri aproape complexe. Avem:

Teorema 5. *Fie J o structură aproape complexă analitică, pe varietatea analitică $2m-$ dimensională M. O condiţie necesară şi suficientă ca J să fie integrabilă este ca N, câmpul său tensorial Nijenhuis, să se anuleze.*

Pentru a demonstra această teoremă sunt necesare unele pregătiri. Amintim mai întâi [10]:

Teorema 6 (Frobenius, complexă). *Fie $\omega^{n+1}, ..., \omega^m$ un sistem de $m - n$ forme liniare olomorfe, independete, definite pe o mulţime deschisă U din $\mathbf{C}^n$. Necesar şi suficient să existe funcţiile olomorfe $h^{n+1}, ..., h^m$ definite pe o vecinătate W a unui punct arbitrar $x \in U$, cu proprietatea că, pe W, sistemul diferenţial:*

$$\omega^{n+1} = ... = \omega^m = 0 \tag{2.10}$$

să fie echivalent cu sistemul:

$$dh^{n+1} = ... = dh^m = 0 \tag{2.11}$$

este să existe formele olomorfe $\omega^\alpha_\beta, \alpha, \beta = n+1, ..., m$, astfel ca:

$$d\omega^\alpha = \sum_{\beta=n+1}^{m} \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta, (\forall)\alpha = n+1, ..., m. \tag{2.12}$$

Teorema Frobenius complexă asigură existenţa varietăţilor complexe integrale ale unui sistem diferenţial complet integrabil. Condiţia (2.11) este echivalentă cu

$$h^{n+1} = ... = h^m = const. \tag{2.13}$$

Funcţiile $h^{n+1}, ..., h^m$ fiind olomorfe, (2.13) defineşte subvarietăţi complexe din $\mathbf{C}^m$ având proprietatea că spaţiul tangent la o astfel de subvarietate este spaţiu de soluţii ale sistemului diferenţial (2.10).

Fie acum $f : M \to M'$ aplicaţie diferenţiabilă între varietăţile diferenţiabile reale M şi M' dotate cu structura aproape complexă J respectiv J'. Fie $f_* : TM \to TM'$ diferenţiala aplicaţiei f. Ea se extinde prin $\mathbf{C}-$ liniaritate la aplicaţia $f_* : T^{\mathbf{C}}M \to T^{\mathbf{C}}M'$. Are loc:

Lema 7. *Fie $f : M \to M'$ o aplicaţie diferenţiabilă între varietăţile diferenţiabile reale M şi M' dotate cu structura aproape complexă J respectiv J'. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

i) Dacă Z este câmp vectorial complex de tip $(1,0)$ tangent la M, atunci f_*Z este câmp vectorial complex de tip $(1,0)$ tangent la M';

ii) Dacă Z este câmp vectorial complex de tip $(0,1)$ tangent la M, atunci f_*Z este câmp vectorial complex de tip $(0,1)$ tangent la M';

iii) Dacă ω este (p,q) -formă pe M', atunci $f^*\omega$ este $(p,q)-$ formă pe M;

iv) Aplicaţia f este aproape complexă.

Demonstraţie. Condi ţiile $i)$ şi $ii)$ sunt echivalente deoarece dacă Z este de tip $(1,0)$ (respectiv de tip $(0,1)$), atunci conjugatul său $\overline{Z}$ este de tip $(0,1)$ (respectiv $(1,0)$). Mai mult, $f_*(\overline{Z}) = \overline{f_*(Z)}$.

Demonstrăm că $i)$ (sau, echivalent, $ii)$) implică $iii)$. Dacă ω este formă de tip $(0,1)$ pe M', deducem, conform definiţiei, că oricare ar fi câmpul vectorial complex Z' de tip $(1,0)$, tangent la M' , avem $\omega(Z') = 0$. Pe de altă parte, fie Z câmp vectorial complex de tip $(1,0)$ tangent la M. Din $i)$ deducem că f_*Z este câmp vectorial complex de tip $(1,0)$ tangent la M'. Avem

$$(f^*\omega)(Z) =^{def} \omega(f_*Z) = 0,$$

oricare ar fi câmpul vectorial complex Z de tip $(1,0)$ tangent la M, ceeace conduce la concluzia că forma $f^*\omega$ este de tip $(0,1)$. Analog, presupunând adevărată condiţia $i)$ (sau, echivalent, $ii)$), se arată că alegând ω formă de tip $(1,0)$ pe M', deducem că $f^*\omega$ este formă de tip $(1,0)$ pe M. Se ştie că $\mathcal{C}^{p,q}(M')$ este generat local de

$$\mathcal{C}^{1,0}(M') \oplus \mathcal{C}^{0,1}(M') \oplus \mathcal{C}^{0,0}(M'),$$

ceeace arată că $i) \Longrightarrow iii)$ (respectiv $ii) \Longrightarrow iii)$). Reciproc, este evident.

Sa arătăm că $i) \Leftrightarrow iv)$. Dacă $X \in \mathcal{X}(M)$, atunci $X - \mathrm{i}JX$ este câmp vectorial complex de tip $(1,0)$. Avem:

$$f_*(X - \mathrm{i}JX) = f_*(X) - \mathrm{i}f_*(JX). \tag{2.14}$$

Din $i)$, deducem că $f_*(X - \mathbf{i}JX)$ este câmp vectorial complex de tip $(1,0)$ pe M'. Atunci, din (2.14), deducem: $f_*(JX) = J'f_*(X)$, deci $i) \Longrightarrow iv)$. Reciproc este evident.□

Lema 8. *Fie M o varietate diferenţiabilă reală, de dimensiune $n = 2m$, dotată cu structura aproape complexă J.*

Presupunem că oricare ar fi punctul $x \in M$, există o vecinătate U a lui x, şi m funcţii diferenţiabile, cu valori complexe $f^1, ..., f^m$, definite pe U cu proprietatea că $df^1, ..., df^m$ sunt forme independente pe U (peste inelul funcţiilor diferenţiabile definite pe U), cu valori complexe, de tip $(1,0)$. Atunci structura aproape complexă J este integrabilă.

Demonstraţie. Funcţiile $f^j : U \to \mathbf{C}, j = 1, ..., m$, au următoarea exprimare locală:

$$f^j(x) = f'^j(x) + \mathbf{i}f''^j(x), (\forall) j \in \{1, ..., m\}, x \in U.$$

Deoarece $df^1, ..., df^m$ sunt independente peste inelul funcţiilor diferenţiabile definite pe U, cu valori complexe, rezultă că, *în punctul* x, sistemul

$$\{df'^1, ..., df'^m, df''^1, ..., df''^m\}$$

este liniar independent peste $\mathbf{R}$. Micşorând eventual deschisul U, deducem că funcţiile $f^1, ..., f^m$ definesc un homeomorfism $\varphi : U \to \varphi(U)$, dat de formula:

$$\varphi(x) = (f^1(x), ..., f^m(x)) = (f'^1(x), ..., f'^m(x), f''^1(x), ..., f''^m(x)),$$

oricare ar fi $x \in U$, unde $\varphi(U)$ este un deschis din $\mathbf{C}^m \approx \mathbf{R}^n, n = 2m$.

Vom arăta că se obţine astfel un atlas de varietate complexă pe M. Pentru a demonstra această afirmaţie, să considerăm şi o altă mulţime deschisă $V \subset M, V \cap U \neq \Phi$, împreună cu cele m funcţii diferenţiabile, cu valori complexe $g^j : V \to \mathbf{C}, j \in \{1, ..., m\}$, având proprietăţile funcţiilor $f^j, j \in \{1, ..., m\}$, din ipoteza lemei. Local,

$$g^j(x) = g'^j(x) + \mathbf{i}g''^j(x), (\forall) j \in \{1, ..., m\}, x \in V.$$

Micşorând eventual deschisul V, deducem homeomorfismul $\psi: V \to \psi(V)$, dat de formula:

$$\psi(x) = (g^1(x), ..., g^m(x)) = (g'^1(x), ..., g'^m(x), g''^1(x), ..., g''^m(x)),$$

oricare ar fi elementul $x \in V$, unde $\psi(V)$ este un deschis din $\mathbf{C}^m \approx \mathbf{R}^n, n = 2m$.

Cum 1-formele complexe $df^1, ..., df^m, dg^1, ..., dg^m$ sunt, din ipoteză, de tip $(1,0)$, ele se vor anula pe orice câmp vectorial complex de tip

$(0,1)$, definit pe $U \cap V$. Deci, $\varphi_* : T^{\mathbf{C}}M_{|U} \to T^{\mathbf{C}}\mathbf{C}^m$ va duce orice câmp vectorial complex de tip $(0,1)$, tangent la U în câmpul vectorial nul din $\mathbf{C}^m$. Analog, $\psi_* : T^{\mathbf{C}}M_{|V} \to T^{\mathbf{C}}\mathbf{C}^m$ va duce orice câmp vectorial complex de tip $(0,1)$, tangent la V în câmpul vectorial nul din $\mathbf{C}^m$. Câmpul vectorial nul din $\mathbf{C}^m$ este şi de tip $(0,1)$. Ca urmare a lemei 7, φ şi ψ fiind aplicaţii ce conservă câmpurile vectoriale de tip $(0,1)$, vor fi aproape complexe (în raport cu structura aproape complexă J de pe M, respectiv structura aproape complexă canonică pe $\mathbf{C}^m$). Rezultă că $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ este aproape complexă, deci olomorfă, din Propoziţia 3. Ca urmare, M este varietate complexă, iar structura aproape complexă J este integrabilă.□

Demonstraţia teoremei 5.

Dacă structura aproape complexă J este integrabilă, atunci există un atlas al varietăţii M cu proprietatea că matricea asociată endomorfismului $J_x : T_xM \to T_xM$, în raport cu baza canonică a lui T_xM este de forma (2.2), oricare ar fi $x \in M$. Ca urmare, având în vedere (2.8), se calculează expresia în coordonate locale a lui N şi rezultă $N = 0$.

Reciproc, presupunând $N = 0$, fie $T^{*\mathbf{C}}M$ fibratul vectorial al $1-$formelor complexe pe M. Oricare ar fi $x \in M$, $T_x^{*\mathbf{C}}M$ este spaţiu vectorial complex de dimensiune $2m$ ce are ca subspaţiu vectorial, de dimensiune m, mulţimea vectorilor cotangenţi de tip $(1,0)$ (sau, echivalent, al formelor de tip $(1,0)$). Local, în jurul oricărui punct x fixat, putem considera un câmp de corepere $\{\theta^1, ..., \theta^m\}$ al subspaţiului formelor de tip $(1,0)$. Atunci, pe aceeaşi vecinătate, $\{\theta^{\bar{1}}, ..., \theta^{\bar{m}}\}$ este câmp de repere al spaţiului formelor de tip $(0,1)$, unde am notat $\overline{\theta^j} = \theta^{\bar{j}}$, $(\forall) j \in \{1, ..., m\}$.

Deoarece $N = 0$, din Propoziţia 4, deducem că

$$d\theta^j \in \mathcal{C}^{2,0} \oplus \mathcal{C}^{1,1}, d\theta^{\bar{j}} \in \mathcal{C}^{0,2} \oplus \mathcal{C}^{1,1}, (\forall) j \in \{1, ..., m\}$$

astfel încât putem scrie:

$$\begin{array}{c} d\theta^j = \sum_{h,k} a^j_{hk} \theta^h \wedge \theta^k + \sum_{h,k} b^j_{hk} \theta^h \wedge \theta^{\bar{k}} \\ d\theta^{\bar{j}} = \sum_{h,k} \bar{a}^j_{hk} \theta^{\bar{h}} \wedge \theta^{\bar{k}} + \sum_{h,k} \bar{b}^j_{hk} \theta^{\bar{h}} \wedge \theta^k, (\forall) j \in \{1, ..., m\}. \end{array} \tag{2.15}$$

Varietatea M este analitică ca şi structura aproape complexă J. Considerăm atunci formele $\theta^1, ..., \theta^m$ analitice. Funcţiile

$$a^j_{hk}, b^j_{hk}, i, j, k \in \{1, ..., m\},$$

vor depinde analitic de coordonatele locale considerate în jurul punctului x. Notând aceste coordonate cu $(x^1, ..., x^n), n = 2m$, avem expresiile locale:

$$\theta^j = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta^j_\alpha dx^\alpha, \theta^{\bar{j}} = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta^{\bar{j}}_\alpha dx^\alpha, (\forall) j \in \{1, ..., m\}.$$

Identificăm $\mathbf{R}$ cu un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial complex $\mathbf{C}$, luând aplicaţia $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ care face să corespundă oricărui număr real r numărul complex z având partea reală egală cu r, iar cea imaginară nulă. În acest mod, $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$.

Orice funcţie analitică definită pe un deschis $U \subseteq \mathbf{R}^n$, se poate extinde la o funcţie olomorfă, notată tot cu f, definită pe un deschis din $\mathbf{C}^n$, ce conţine pe U, înlocuid în seria de puteri convergentă a lui f variabilele reale $(x^1, ..., x^n)$ cu $(z^1, ..., z^n)$ încât $z^\alpha = x^\alpha + \mathrm{i}y^\alpha, \alpha \in \{1, ..., n\}, n = 2m$. Restricţia la $\mathbf{R}^n$ a acestei funcţii olomorfe se obţine făcând, în variabilele $z^\alpha = x^\alpha + \mathrm{i}y^\alpha, \alpha \in \{1, ..., n\}$, pe $y^\alpha = 0$; recuperăm astfel funcţia analitică f de la care am plecat.

Procedând astfel cu funcţiile

$$\theta^j_\alpha, \theta^{\bar{j}}_\alpha, (\forall)\alpha \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}, n = 2m,$$

se obţin extensiile olomorfe ale formelor $\theta^j, j \in \{1, ..., m\}$, respectiv $\theta^{\bar{j}}$ definite pe un deschis din $\mathbf{C}^n, n = 2m$, ce conţine imaginea hărţii locale considerate iniţial în jurul punctului $x \in M$. Este de remarcat că funcţia θ^j_α nu mai este, în general, complex conjugată cu $\theta^{\bar{j}}_\alpha$. În schimb, sistemul de $1-$forme olomorfe $\{\theta^1, ..., \theta^m, \theta^{\bar{1}}, ..., \theta^{\bar{m}}\}$ este liniar independent.

Procedăm analog cu $2-$ formele analitice $d\theta^j, d\theta^{\bar{j}}, j \in \{1, ..., m\}$ şi construim $2-$ formele olomorfe corespunzătore. Expresiile lor vor fi de forma (2.15) unde a^j_{hk}, $b^j_{hk}, i, j, k \in \{1, ..., m\}$ sunt extensiile olomorfe respectiv ale funcţiilor analitice notate la fel. Ca urmare:

$$d\theta^j = -[\sum_{h,k} a^j_{hk}\theta^k + \sum_{h,k} b^j_{hk}\theta^{\bar{k}}] \wedge \theta^h, (\forall)j \in \{1, ..., m\}.$$

În baza teoremei 6 (Frobenius, complexă) deducem existenţa funcţiilor olomorfe $f^1, ..., f^m$, definite pe un deschis din $\mathbf{C}^n, n = 2m$, cu proprietatea că sistemul diferenţial complex:

$$\theta^1 = ... = \theta^m = 0$$

este echivalent cu sistemul:

$$df^1 = ... = df^m = 0.$$

Putem scrie atunci:

$$\theta^j = \sum_{k=1}^m A^j_k df^k, df^j = \sum_{k=1}^m B^j_k \theta^k, (\forall)j \in \{1, ..., m\}. \tag{2.16}$$

Funcţiile $A^j_k, B^j_k, k, j \in \{1, ..., m\}$ sunt olomorfe iar $A = (A^j_k)_{j,k}$, $B = (B^j_k)_{j,k}$ sunt matrice nedegenerate, fiind una inversa celeilalte. Considerăm restricţiile funcţiilor olomorfe $A^j_k, B^j_k, k, j \in \{1, ..., m\}$ la $\mathbf{R}^{2m}$.

Rezultă relaţii analoage cu (2.16) între aceste restricţii. Deci, avem $\{df^1, ..., df^m\}$, un sistem independent de $1-$ forme de tip $(1,0)$, deoarece sistemul de $1-$forme $\{\theta^1, ..., \theta^m\}$ are aceste proprietăţi. Conform lemei 8, am încheiat demonstraţia.□

Definiţie. Conexiunea liniară ∇ dată pe o varietate diferenţiabilă reală dotată cu o structură aproape complexă J se numeşte *conexiune aproape complexă* dacă şi numai dacă

$$J\nabla_X Y = \nabla_X JY, (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Exerciţii

1) Dacă există ∇ o conexiune aproape complexă cu torsiunea nulă, definită pe varietatea diferenţiabilă M , dotată cu stuctura aproape complexă J, atunci J este integrabilă. *Indicaţie.* Se arată că tensorul Nijenhuis N este nul.

2) Dacă există ∇ o conexiune aproape complexă, definită pe varietatea M, cu structura aproape complexă J, atunci:

$$J \circ R_{XY} = R_{XY} \circ J,$$

oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

3) Fie N tensorul Nijenhuis al structurii aproape complexe J. Local, notând $\partial/dx^k = \partial_k$, $N(\partial_i, \partial_j) = N_{ij}^k \partial_k$, oricare ar fi $i, j, k \in \{1, ..., n\}, n = 2m$, să se arate că are loc formula:

$$N_{ij}^k = 2(J_i^s \partial_s J_j^k - J_j^s \partial_s J_i^k - J_s^k \partial_i J_j^s + J_s^k \partial_j J_i^s),$$

unde am notat de asemanea, $J(\partial_i) = J_i^s \partial_s$ oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$.

4) Torsiunea T a unei conexiuni aproape complexe ∇ verifică identitatea:

$$T(JX, JY) - JT(JX, Y) - JT(X, JY) - T(X, Y) = -\frac{1}{2} N(X, Y).$$

oricare ar fi câmpurile vectoriale X, Y.

5) Fie $(z^1, ..., z^m)$ un sistem local de coordonate complexe al varietăţii complexe M. Arătaţi că oricare ar fi $\alpha \in \{1, ..., m\}$, $\partial/\partial z^\alpha$ este câmp vectorial de tip $(1,0)$ iar $\partial/\partial z^{\overline{\alpha}}$ este câmp vectorial de tip $(0,1)$, în raport cu structura canonică de varietate aproape complexă indusă de structura complexă a lui M.

Varietăţi hermitiene şi kähleriene

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă, reală, de dimensiune $n =$

$2m$, dotată cu structura aproape complexă J. O *metrică hermitiană* h pe M este o metrică riemanniană h pe M, având proprietatea:

$$h(X,Y) = h(JX,JY), (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Observăm că o metrică hermitiană h pe varietatea M, dotată cu structura aproape complexă J, induce pe fiecare spaţiu tangent T_xM, $x \in M$, un produs scalar hermitian.

Definiţie. O varietate *aproape complexă,* dotată cu o metrică hermitiană, se numeşte *varietate aproape hermitiană.* O varietate *complexă,* dotată cu o metrică hermitiană, se numeşte *varietate hermitiană.*

Se demonstrează cu uşurinţă că orice varietate riemanniană, (M,g), dotată cu o structură aproape complexă J, este o varietate aproape hermitiană. In adevăr, o metrică hermitiană pe M este metrica h dată prin formula:

$$h(X,Y) = \frac{1}{2}[g(X,Y) + g(JX,JY)] \tag{2.17}$$

oricare ar fi $X,Y \in \mathcal{X}(M)$.

Fie $\mathcal{X}^{\mathbf{C}}(M)$ spaţiul câmpurilor vectoriale complexe tangente la M.

Orice metrică hermitiană h a varietăţii aproape complexe M se poate extinde prin $\mathbf{C}$−liniaritate la $T^{\mathbf{C}}M$. Această extensie se va nota de asemenea cu h. Ea are următoarele proprietăţi:

i) $h(\overline{Z},\overline{W}) = \overline{h(Z,W)}, (\forall)Z,W \in \mathcal{X}^{\mathbf{C}}(M)$

ii) $h(Z,\overline{Z}) > 0 (\forall)Z \neq 0, Z \in \mathcal{X}^{\mathbf{C}}(M)$

iii) $h(Z,W) = 0$ oricare ar fi câmpurile vectoriale Z,W de tip $(0,1)$ (resp. $(1,0)$).

Metrica hermitiană h a unei varietăţi aproape hermitiene M conduce la introducerea pe M a unei 2− forme Φ, numită 2− *forma fundamentală* a varietăţii hermitiene considerate, prin formula

$$\Phi(X,Y) = h(X,JY), (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Deoarece h este hermitiană, rezultă

$$\Phi(JX,JY) = \Phi(X,Y), (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Forma fundamentală Φ se extinde prin $\mathbf{C}$−biliniaritate la câmpuri vectoriale complexe. Se remarcă imediat că 2− forma complexă Φ astfel obţinută este nulă pe perechi de câmpuri vectoriale de tip (1,0), respectiv (0,1). Ca urmare, Φ este o $(1,1)$− formă.

Fie ∇ conexiunea Levi-Civita a metricii hermitiene h. În general ∇ nu este conexiune aproape complexă. Se arată [10] :

Teorema 9. *Fie M o varietate aproape hermitiană, cu structura aproape complexă J şi metrica hermitiană h.*

Sunt echivalente următoarele afirmaţii:

1) *Conexiunea Levi-Civita* ∇ *a metricii hermitiene* h *este aproape complexă;*

2) $N = 0, d\Phi = 0$.

Din teorema 5, rezultă că $N = 0$ este echivalent cu faptul că varietatea aproape complexă M este complexă. Ca urmare, păstrând notaţiile de mai sus, dacă alegem M *varietate hermitiană*, atunci sunt echivalente afirmaţiile:

1) *Conexiunea Levi-Civita* ∇ *a metricii hermitiene* h *este aproape complexă;*

2′) $d\Phi = 0$, *adică* $2-$ *forma fundamentală* Φ *este închisă.*

Definiţie. O metrică hermitiană pe o varietate aproape hermitiană se nume şte *metrică Kähler* dacă şi numai dacă $2-$ forma sa fundamentală este închisă.

Definiţie. O varietate aproape hermitiană (respectiv hermitiană) dotată cu o metrică Kähler se numeşte *varietate aproape Kähler (respectiv Kähler).*

Este util pentru cele ce urmează să amintim următorele proprietăţi ale tensorului de curbura respectiv ale tensorului Ricci, Ric pe o varietate Kähler M. Oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, notând $R_{XY} = R(X,Y)$, avem:

$$R(X,Y) \circ J = J \circ R(X,Y) \tag{2.18}$$

$$R(JX, JY) = R(X,Y) \tag{2.19}$$

$$Ric(JX, JY) = Ric(X,Y) \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered} Ric(X,Y) = -\tfrac{1}{2} trace\ T, \\ unde\ T(V) = J \circ R(X, JY)V, (\forall)V \in \mathcal{X}(M) \end{gathered} \tag{2.21}$$

Exerciţii.

1) Fie M o varietate hermitiană de dimensiune n, cu metrica hermitiană h. Fie $(z^1, ..., z^n)$ coordonate locale complexe

$$z^k = x^k + \mathbf{i}y^k, x^k, y^k \in \mathbf{R}, k \in \{1, ..., n\}. \tag{2.22}$$

Considerăm câmpurile locale canonice corespunzătoare:

$$Z_k = \frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y^k}), k \in \{1, ..., n\}, \tag{2.23}$$

precum şi conjugatele lor:

$$Z_{\overline{k}} = \frac{\partial}{\partial z^{\overline{k}}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y^k}), k \in \{1, ..., n\}. \tag{2.24}$$

Facem următoarele notaţii: $A, B \in \{ 1, ..., n, \overline{1}, ..., \overline{n}\}$ iar $h(Z_A, Z_B) = h_{AB}$. Arătaţi că avem $h_{jk} = h_{\overline{jk}} = 0, (\forall)j, k \in \{1, ..., n\}$.

i) Dacă Φ este 2– forma fundamentală corespunzătoare, deduceţi următoarea exprimare locală:

$$\Phi = -\mathrm{i}\sum_{j,k}^{n} h_{j\overline{k}}dz^j \wedge dz^{\overline{k}}. \tag{2.25}$$

ii) Utilizând (2.25) arătaţi că (1, 1)– forma Φ este reală, adică $\Phi = \overline{\Phi}$.

Operatorii $\partial, \overline{\partial}, \partial^*, \overline{\partial}^*$

Fie M o varietate hermitiană, de dimensiune complexă n şi

$$G = \sum_{i\overline{j}=1}^{n} G_{i\overline{j}}dz^i dz^{\overline{j}} \tag{2.26}$$

metrica sa hermitiană exprimată în coordonatele locale $(z^1, ..., z^n)$.

Definiţie. Un sistem de coordonate complexe $(z^1, ..., z^n)$ definit pe o vecinătate de coordonate $U \subseteq M$ se numeşte *sistem de coordonate normale în punctul* $p \in U$ dacă şi numai dacă:

$$G_{i\overline{j}}(p) = \delta_{ij}, dG_{i\overline{j}}(p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{2.27}$$

Dacă Φ este 2–forma fundamentală corespunzătoare, condiţia a doua din (2.27) implică $d\Phi(p) = 0$. Se ştie că dacă $d\Phi = 0$, atunci varietatea hermitiană M este, prin definiţie o varietate Kähler. Deci, în contrast cu cazul unei varietăţi Riemann, pe care există coordonate normale în orice punct, în cazul varietăţilor hermitiene o condiţie necesară pentru ca astfel de coordonate să existe este ca 2– forma fundamentală Φ să fie închisă, deci varietatea M să fie varietate Kähler.

În cele ce urmează M va fi o varietate Kähler. Dacă $(z^1, ..., z^n)$ este un sistem de coordonate complexe pe deschisul $U \subseteq M$, atunci utilizăm notaţiile (2.22), (2.23), (2.24). Rezultă imediat că $\{Z_1, ..., Z_n\}$ respectiv $\{Z_{\overline{1}}, ..., Z_{\overline{n}}\}$ sunt câmpuri de repere de tip (1, 0), respectiv (0, 1) pe U în raport cu structura aproape complexă canonică J dată local, prin formulele:

$$J(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{\partial}{\partial y^k}, J(\frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.28}$$

oricare ar fi indicele $k \in \{1, ..., n\}$.

Rezultă că G, fiind extensia la câmpuri vectoriale complexe a unei metrici hermitiene, se anulează pe perechi de câmpuri vectoriale de tip (1, 0), respectiv (0, 1). Notând $G_{i\overline{j}} = G(Z_i, Z_{\overline{j}})$, avem:

$$G_{i\bar{j}} = \overline{G_{\bar{i}j}} = \overline{G_{j\bar{i}}}. \tag{2.29}$$

Propoziţia 10. *Există un sistem de coordonate normale în punctul p, oricare ar fi p un punct arbitrar fixat al varietăţii Kähler M.*

Demonstraţie. Fie G metrica hermitiană a varietăţii Kähler M, având local expresia (2.26). Din faptul că M este varietate Kähler, rezultă că $d\Phi = 0$, unde Φ este 2– forma fundamentală. Să observăm că, având în vedere expresia (2.25), deducem că $d\Phi = 0$ se exprimă local prin relaţiile:

$$\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial G_{k\bar{j}}}{\partial z^i} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^{\bar{k}}} = \frac{\partial G_{i\bar{k}}}{\partial z^{\bar{j}}} \tag{2.31}$$

oricare ar fi indicii $i, j, k \in \{1, ..., n\}$. În adevăr,

$$d\Phi = -\frac{i}{2}\sum_{i,j,k} \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^i \wedge dz^{\bar{j}} - \frac{i}{2}\sum_{i,j,k} \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^{\bar{k}}} dz^{\bar{k}} \wedge dz^i \wedge dz^{\bar{j}}$$

sau,

$$d\Phi = -\tfrac{i}{2}\textstyle\sum_{\substack{i<k\\ j}}\left(\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - \frac{\partial G_{k\bar{j}}}{\partial z^i}\right) dz^i \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^k -$$
$$-\tfrac{i}{2}\textstyle\sum_{\substack{k<j\\ i}}\left(\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^{\bar{k}}} - \frac{\partial G_{i\bar{k}}}{\partial z^{\bar{j}}}\right) dz^i \wedge dz^{\bar{j}} \wedge dz^{\bar{k}}.$$

Putem alege un sistem de coordonate $(z^1, ..., z^n)$, astfel încât

$$z^k(p) = 0, G_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}, (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Considerăm noi coordonate $(w^1, ..., w^n)$, date de formulele:

$$w^i = z^i + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial G_{j\bar{i}}}{\partial z^k}(p) z^j z^k, (\forall) i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.32}$$

Să notăm $\widetilde{G}_{r\bar{s}} = G(\frac{\partial}{\partial w^r}, \frac{\partial}{\partial w^{\bar{s}}})$, componentele tensorului metric G în raport cu noul sistem de coordonate. Avem:

$$G_{i\bar{j}} = \frac{\partial w^r}{\partial z^i}\frac{\partial w^{\bar{s}}}{\partial z^{\bar{j}}}\widetilde{G}_{r\bar{s}}, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\} \tag{2.33}$$

deoarece, conform formulei (2.32), coordonatele $(w^1, ..., w^n)$ nu depind decât de $z^1, ..., z^n$ şi nu depind de conjugatele lor, respectiv, $z^{\bar{1}}, ..., z^{\bar{n}}$. Din (2.32) deducem, oricare ar fi $r \in \{1, ..., n\}$:

$$\frac{\partial w^r}{\partial z^i} = \delta_i^r + \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k} \frac{\partial G_{j\bar{r}}}{\partial z^k}(p)\delta_i^j z^k + \sum_{j,k} \frac{\partial G_{j\bar{r}}}{\partial z^k}(p) z^j \delta_i^k\right].$$

Din (2.30) avem:

$$\frac{\partial w^r}{\partial z^i} = \delta_i^r + \sum_k \frac{\partial G_{i\bar{r}}}{\partial z^k}(p) z^k, (\forall) r \in \{1, ..., n\}$$

şi (2.33) devine, oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$G_{i\bar{j}} = \tilde{G}_{r\bar{s}}[\delta_i^r + \sum_k \frac{\partial G_{i\bar{r}}}{\partial z^k}(p) z^k][\delta_j^s + \sum_h \frac{\partial \overline{G}_{j\bar{s}}}{\partial z^{\bar{h}}}(p) z^{\bar{h}}],$$

de unde, deoarece $\tilde{G}_{i\bar{j}}(p) = G_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^t}(p) = \frac{\partial \tilde{G}_{i\bar{j}}}{\partial z^t}(p) + \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^t}(p), (\forall) i, j, t \in \{1, ..., n\},$$

ceeace ne arată că:

$$\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial w^t}(p) = \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial z^t}(p) = 0, (\forall) i, j, t \in \{1, ..., n\}.$$

Este imediat acum, folosind formulele analoage formulelor (2.33), ce exprimă componentele tensorului metric $\tilde{G}_{i\bar{j}}$ funcţie de $G_{i\bar{j}}, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$, că $\frac{\partial \tilde{G}_{i\bar{j}}}{\partial w^r}(p) = 0, (\forall) i, j, r \in \{1, ..., n\}$. Rezultă $d\tilde{G}_{i\bar{j}}(p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$□

Fie $(M, <, >)$ o varietate Kähler de dimensiune $2n$, unde $<, >= G$ este metrica hermitiană a lui M.

Definiţie. Se numeşte *câmp de repere de tip* $(1,0)$ pe M un sistem $\{V_1, ..., V_n\}$ de n câmpuri vectoriale independente de tip $(1,0)$, definite pe un deschis U al lui M, cu proprietatea $< V_i, V_{\bar{j}} >= \delta_{ij}, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

Observaţie. Dacă $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp de repere de tip $(1,0)$ pe M, atunci $< V_i, V_j >=< V_{\bar{i}}, V_{\bar{j}} >= 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

Oricare ar fi $p \in M$, spaţiul tangent complexificat $T_p^{\mathbf{C}} M$ se descompune ca suma directă:

$$T_p^{\mathbf{C}} M = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M \tag{2.34}$$

a subspaţiilor proprii corespunzătoare respectiv valorilor proprii $i, -i$ ale endomorfismului $J_p : T_p^{\mathbf{C}} M \to T_p^{\mathbf{C}} M$ unde J este structura complexă a varietăţii Kähler M. Rezultă că $T_p^{1,0}$ şi $T_p^{0,1} M$ sunt subspaţii total izotrope (maximale) ale lui $T_p^{\mathbf{C}} M$, iar (2.34) este o *descompunere Witt* a spaţiului tangent complexificat $T_p^{\mathbf{C}} M$. În plus, dacă $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp de repere de tip $(1,0)$ pe M, atunci $\{V_1, ..., V_n, V_{\bar{1}}, ..., V_{\bar{n}}\}$ este un câmp de repere Witt, unde $V_{\bar{j}} = \overline{V_j}, (\forall) j \in \{1, ..., n\}$.[30]

Să observăm că există câmpuri de repere de tip $(1,0)$. În adevăr, fie $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ un câmp ortonormat de repere pe varietatea M, în raport cu metrica hermitiană g, metrică ce extinsă prin

C− biliniaritate furnizează metrica $G =<,>$. Atunci, $g(X_i, X_j) = g(JX_i, JX_j) = \delta_{ij}, g(X_i, JX_j) = 0, (\forall)\ i, j \in \{1, ..., n\}$. Considerăm câmpurile vectoriale $V_j = \frac{1}{2}(X_j - iJX_j), (\forall) j \in \{1, ..., n\}$ şi rezultă $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp de repere de tip $(1,0)$ pe M.

Exerciţiu.

Fie $\{V_1, ..., V_n\}, \{W_1, ..., W_n\}$ câmpuri de repere de tip $(1,0)$ pe M, definite pe acelaşi deschis $U \subseteq M$. Avem următoarele formule de schimbare de reper:

$$\begin{matrix} W_i = \sum_{j=1}^n (a_i^j V_j + b_i^j V_{\bar{j}}) \\ W_{\bar{i}} = \sum_{j=1}^n (\overline{a_i^j} V_{\bar{j}} + \overline{b_i^j} V_j) \end{matrix} \quad (\forall) i \in \{1, ..., n\}$$

Arătaţi că $b_i^j = 0, (\forall)\ i, j \in \{1, ..., n\}$, iar matricea $A = (a_i^j)_{ij}$ este unitară (adică $A\overline{{}^tA} = I_n$, unde I_n semnifică matricea unitate de ordin n iar $\overline{{}^tA}$ este conjugata transpusei matricei A).

Definiţie. Un câmp de repere de tip $(1,0)$, notat $\{V_1, ..., V_n\}$, se numeşte *câmp de repere de tip* $(1,0)$, *normal în punctul* $p \in M$, dacă şi numai dacă

$$(\nabla_{V_i} V_j)(p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}, \tag{2.35}$$

unde ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii g ce a fost extinsă prin **C**−liniaritate la câmpuri vectoriale complexe.

Observaţii.

1) În general, dacă $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp de repere de tip $(1,0)$, avem:

$$\nabla_{V_i} V_j = \Gamma_{ij}^k V_k + \Gamma_{ij}'^k V_{\bar{k}}, \tag{2.36}$$

ca urmare a descompunerii în sumă directă (2.34). Teorema 9 arată că ∇ este conexiune aproape complexă deoarece varietatea dată M este Kähler. Ca urmare, oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$ au loc formulele:

$$J\nabla_{V_i} V_j = \nabla_{V_i} JV_j. \tag{2.37}$$

Ţinând cont de (2.36), formula (2.37) devine $J(\Gamma_{ij}^k V_k + \Gamma_{ij}'^k V_{\bar{k}}) = \mathbf{i}\nabla_{V_i} V_j$, sau $\mathbf{i}(\Gamma_{ij}^k V_k - \Gamma_{ij}'^k V_{\bar{k}}) = \mathbf{i}(\Gamma_{ij}^k V_k + \Gamma_{ij}'^k V_{\bar{k}})$, ceeace conduce la condiţiile $\Gamma_{ij}'^k = 0, (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Deci:

$$\nabla_{V_i} V_j = \Gamma_{ij}^k V_k, (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}. \tag{2.38}$$

2) Dacă $\{V_1, ..., V_n\}$ este câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în punctul $p \in M$, atunci, oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$(\nabla_{V_{\bar{i}}} V_{\bar{j}})(p) = (\nabla_{V_i} V_{\bar{j}})(p) = (\nabla_{V_{\bar{i}}} V_j)(p) = 0 \tag{2.39}$$

Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea acestei formule.

Lema 11. *Fie M o varietate Kähler. Există un câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în punctul $p \in M$, oricare ar fi punctul fixat $p \in M$.*

Demonstraţie. Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp de repere de tip $(1,0)$ definit pe un deschis U, în jurul punctului fixat $p \in M$ şi funcţiile $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbf{C}$, date de (2.38). Alegem pe U un sistem de coordonate $(z^1, ..., z^n) \in \mathbf{C}^n$ cu proprietatea:

$$z^i(p) = 0, \frac{\partial}{\partial z^i}(p) = V_i(p), (\forall) i \in \{1, ..., n\}.$$

Fie $B = (b^j_i)_{ij}$ matricea antihermitiană (deci cu proprietatea $B = -{}^t\overline{B}$) definită prin $b^j_i = -\sum_{k=1}^n [\Gamma^j_{ki}(p) z^k - \overline{\Gamma^i_{kj}\{p\}} z^{\bar{k}}]$.

Matricea $A = \exp B$ va fi atunci unitară. Ca urmare, câmpul de repere $\{W_1, ..., W_n\}$, dat de $W_i = a^j_i V_j, (\forall) i \in \{1, ..., n\}$, este câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în punctul p. În adevăr,

$$\nabla_{W_i} W_j = a^r_i [V_r(a^k_j) + a^s_j \Gamma^k_{rs}] V_k, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\} \tag{2.40}$$

Din definiţia matricei A, avem $V_r(a^k_j) = V_r(b^s_j) a^k_s, (\forall)\ i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Rezultă:

$$V_r(a^k_j)(p) = -\Gamma^k_{rj}(p), (\forall) j, k, r \in \{1, ..., n\}. \tag{2.41}$$

Atunci, din formulele (2.40),(2.41), deducem:

$$(\nabla_{W_i} W_j)(p) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}. \square$$

Observaţie. Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în punctul $p \in M$. Fie $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ câmpul său dual de corepere. Rezultă că ω^j este $1-$ formă de tip $(1,0)$ şi $\omega^j(V_i) = \delta^j_i, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

Deducem imediat, oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$(\nabla_{V_i} \omega^j)(p) = (\nabla_{V_i} \omega^{\bar{j}})(p) = (\nabla_{V_{\bar{i}}} \omega^{\bar{j}})(p) = (\nabla_{V_{\bar{i}}} \omega^j)(p) = 0.$$

Urmărim să exprimăm laplacianul pe o varietate Kähler M, de dimensiune $2n$. Notaţiile sunt cele anterioare. Amintim că $\mathcal{C}^{p,q}(M) = \mathcal{C}^{p,q}$ este spaţiul $(p,q)-$ formelor complexe. Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp de repere de tip $(1,0)$ şi $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ câmpul său dual de corepere, definite pe un deschis U din M. Pe spaţiul formelor se introduce un produs scalar, notat $<,>$. Notând cu I multi-indicele $I = (i_1, ..., i_p)$, unde $i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\}, i_1 < ... < i_p, \mid I \mid = p$, vom conveni să scriem $\omega^I = \omega^{i_1} \wedge ... \wedge \omega^{i_p}, \omega^{\bar{I}} = \omega^{\bar{i}_1} \wedge ... \wedge \omega^{\bar{i}_p}$. Oricare ar fi multi-indicii I, J, K, L, se defineşte produsul scalar $<,>$ prin formulele:

$$
\begin{gathered}
<\omega^I,\omega^J>=<\omega^{\overline{I}},\omega^{\overline{J}}>=0\\
<\omega^I,\omega^{\overline{J}}>=\begin{cases}0\ dac\breve{a}\ I\neq J\\ 1\ dac\breve{a}\ I=J\end{cases},\\
<\omega^I\wedge\omega^{\overline{J}},\omega^K\wedge\omega^{\overline{L}}>=\begin{vmatrix}0 & <\omega^I,\omega^{\overline{L}}>\\ <\omega^{\overline{J}},\omega^K> & 0\end{vmatrix}
\end{gathered}
\tag{2.42}
$$

şi se extinde prin liniaritate la orice două forme complexe.

Se introduce operatorul * al lui Hodge astfel:

$$
\begin{gathered}
{}^*:\mathcal{C}^{p,q}\to\mathcal{C}^{n-q,n-p},\varphi\wedge^*\psi=<\varphi,\psi>\Omega,\\
(\forall)\psi\in\mathcal{C}^{p,q},\varphi-arb.
\end{gathered}
\tag{2.43}
$$

unde $\Omega= i^n\omega^1\wedge\omega^{\overline{1}}...\wedge\omega^n\wedge\omega^{\overline{n}}$.

Exemplu. Fie $\psi=f\omega^1\wedge...\wedge\omega^p\wedge\omega^{\overline{1}}\wedge...\wedge\omega^{\overline{q}}$ unde f este o funcţie diferenţiabilă definită pe deschisul U, cu valori complexe. Atunci vom verifica egalitatea:

$$
\begin{gathered}
{}^*\psi=\epsilon f\omega^{q+1}\wedge...\wedge\omega^n\wedge\omega^{\overline{p+1}}\wedge...\wedge\omega^{\overline{n}}, unde\ \epsilon=(-1)^N,\\
N=n(n-1)/2+1+p(n-q)
\end{gathered}
\tag{2.44}
$$

Evident că $\varphi\wedge^*\psi=0$, dacă forma φ conţine cel puţin una dintre formele $\omega^{q+1},...,\omega^n,\omega^{\overline{p+1}},...,\omega^{\overline{n}}$, iar produsul scalar $<\varphi,\psi>$ este de asemenea nul, deci formula (2.43) se verifică în acest caz. Ramâne de verificat formula (2.43) alegând $\varphi=g\omega^1\wedge...\wedge\omega^q\wedge\omega^{\overline{1}}\wedge...\wedge\omega^{\overline{p}}$, unde $g:U\to\mathbf{C}$ este o funcţie diferenţiabilă. Avem :

$$
<\varphi,\psi>\Omega=-fg\Omega \tag{2.45}
$$

iar

$$
\varphi\wedge^*\psi=\epsilon fg(-1)^{p(n-q)+n(n-2)/2}\Omega, \tag{2.46}
$$

Din (2.45), (2.46), deducem că alegând $\epsilon=(-1)^N$, unde N este dat de formula (2.44), egalitatea (2.43) se verifică.

Varietatea M fiind Kähler, tensorul său Nijenhuis N este nul şi din Propoziţia 4 se deduce că oricare ar fi $(p,q)-$ forma φ avem:

$$
d\varphi\in\mathcal{C}^{p+1,q}\oplus\mathcal{C}^{p,q+1}. \tag{2.47}
$$

Pentru a beneficia de structura de varietate Kähler a varietăţii M, se consideră operatorii $\partial:\mathcal{C}^{p,q}\to\mathcal{C}^{p+1,q},\overline{\partial}:\mathcal{C}^{p,q}\to\mathcal{C}^{p,q+1}$ încât $d=\partial+\overline{\partial}$, descompunere ce corespunde sumei directe (2.47).

De exemplu, dacă local, în coordonatele complexe $(z^1,...,z^n)$, se consideră $(p,q)-$forma:

$$\varphi = \sum_{\substack{i_1<...<i_p \\ j_1<...<j_q}} a_{i_1...i_p j_1...j_q} dz^{i_1} \wedge ... \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{\overline{j_1}} \wedge ... \wedge dz^{\overline{j_q}},$$

atunci:

$$\partial\varphi = \sum_{\substack{i_1<...<i_p \\ j_1<...<j_q \\ k=1,...,n}} \frac{\partial a_{i_1...i_p j_1...j_q}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{i_1} \wedge ... \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{\overline{j_1}} \wedge ... \wedge dz^{\overline{j_q}}$$

iar

$$\overline{\partial}\varphi = \sum_{\substack{i_1<...<i_p \\ j_1<...<j_q \\ k=1,...,n}} \frac{\partial a_{i_1...i_p j_1...j_q}}{\partial z^{\overline{k}}} dz^{\overline{k}} \wedge dz^{i_1} \wedge ... \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{\overline{j_1}} \wedge ... \wedge dz^{\overline{j_q}}.$$

Definim de asemenea operatorii $\delta, \partial^*, \overline{\partial}^*$ adjuncţi formal respectiv ai operatorilor $d, \overline{\partial}, \partial$:

$$\delta = -{}^*d^*, \partial^* = -{}^*\overline{\partial}^*, \overline{\partial}^* = -{}^*\partial^*.$$

Observăm că $\delta = \partial^* + \overline{\partial}^*$. Se notează $\Box$ laplacianul complex, definit prin formula:

$$\Box = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}. \tag{2.48}$$

Evident, conjugatul laplacianului complex $\Box$ este:

$$\overline{\Box} = \partial^*\partial + \partial\partial^*. \tag{2.49}$$

Are loc următoarea:

Propoziţia 12. *Fie $\{V_1, ..., V_n\}$ respectiv $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ un câmp local de repere de tip $(1,0)$ respectiv câmpul său dual de corepere definite pe un deschis U al varietăţii Kähler M. Dacă ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii hermitiene g atunci au loc formulele:*

$$\begin{array}{c} \partial = \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \nabla_{V_i}, \overline{\partial} = \sum_{i=1}^n \omega^{\overline{i}} \wedge \nabla_{V_{\overline{i}}}, \\ \partial^* = -\sum_{j=1}^n i(V_j)\nabla_{V_{\overline{j}}}, \overline{\partial}^* = -\sum_{j=1}^n i(V_{\overline{j}})\nabla_{V_j} \end{array}. \tag{2.50}$$

Demonstraţie. Fie $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ un câmp ortonormat de repere al varietăţii riemanniene (M, g). Pe de altă parte, să considerăm $\{\theta^1, ..., \theta^n, -J\theta^1, ..., -J\theta^n\}$ câmpul corespunzător de corepere dual.

Din Propoziţia 2, cap.1, deducem, utilizând formula (1.18):

$$d = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \wedge \nabla_{X_i} - \sum_{i=1}^{n} J\theta^i \wedge \nabla_{JX_i}. \tag{2.51}$$

Vom alege, oricare ar fi indicele $j \in \{1, ...n\}$:

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_j + V_{\bar{j}}), \tag{2.52}$$

şi va rezulta, deoarece $JV_j = iV_j, (\forall) j \in \{1, ..., n\}$:

$$JX_j = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}(V_j - V_{\bar{j}}). \tag{2.53}$$

În plus,

$$\theta^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^j + \omega^{\bar{j}}), J\theta^j = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}(\omega^j - \omega^{\bar{j}}). \tag{2.54}$$

Deci, având în vedere (2.51), (2.52), (2.53), (2.54) deducem

$$d = \sum_{j=1}^{n} (\omega^j \wedge \nabla_{V_j} + \omega^{\bar{j}} \wedge \nabla_{V_{\bar{j}}}).$$

Avem astfel, expresiile locale (2.50) pentru operatorii ∂, respectiv $\overline{\partial}$.

Expresiile locale (2.50) ale operatorilor ∂^*, respectiv $\overline{\partial}^*$ se obţin utilizând formula (1.18) valabilă pe orice varietate Riemann. Avem, în cazul nostru:

$$\delta = -\sum_{j=1}^{n} [i(X_j)\nabla_{X_j} + i(JX_j)\nabla_{JX_j}]. \tag{2.55}$$

Deducem, din (2.52), (2.53), (2.54), (2.55), formula:

$$\delta = -\sum_{j=1}^{n} [i(V_j)\nabla_{V_{\bar{j}}} + i(V_{\bar{j}})\nabla_{V_j}].$$

Avem astfel, expresiile locale (2.50) ale operatorilor ∂^*, respectiv $\overline{\partial}^*$.□

Exerciţii.

1) Arătaţi că formulele (2.50) nu depind de câmpul de repere de tip $(1,0)$ considerat. *Indica ţie.* Se are în vedere proprietatea matricei de trecere între două câmpuri de repede de tip $(1,0)$ de a fi unitară.

2) Demonstraţi că:

$$E = \partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}\partial^* + \overline{\partial}^*\partial + \partial^*\overline{\partial} = 0$$

Indicaţie. Se folosesc formulele (2.50). Se consideră $\{V_1, ..., V_n\}$ câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în punctul p fixat. Va rezulta:

$$E = -\sum_{j,k=1}^{n}[\omega^j \wedge i(V_{\overline{k}})R_{V_jV_k} + \omega^{\overline{j}} \wedge i(V_k)R_{V_{\overline{j}}V_{\overline{k}}}].$$

Varietatea M fiind varietate Kähler, avem (2.19), de unde deducem că:

$$R(V_j, V_k) = R(JV_j, JV_k), (\forall)j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Am folosit mai sus notaţia $R(X,Y) = R_{XY}$ oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Cum $JV_s = iV_s$,oricare ar fi indicele $s \in \{1, ..., n\}$, rezultă: $R(V_j, V_k) = 0$. Analog $R(V_{\overline{j}}, V_{\overline{k}}) = 0$.

Alte rezultate de tip Bochner

Urmărim să exprimăm local laplacianul complex $\square$.

Teorema 13. (Formula Weitzenböck pe varietăţi Kähler) *Pe o varietate Kähler M, de dimensiune reală $2n$, au loc formulele:*

$$\square = -\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_{\overline{i}}} + \sum_{i,j=1}^{n}\omega^{\overline{i}} \wedge i(V_{\overline{j}})R_{V_jV_{\overline{i}}} \tag{2.56}$$

$$\square = -\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_{\overline{i}}} + \sum_{i=1}^{n}R_{V_iV_{\overline{i}}} - \sum_{i,j=1}^{n}\omega^{i} \wedge i(V_j)R_{V_iV_{\overline{j}}} \tag{2.57}$$

unde $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp local de repere de tip $(1,0)$, $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ *este câmpul său dual de corepere, iar ∇^2 şi R au semnificaţia obişnuită pe o varietate Riemann* (vezi şi teorema 3, Prima formulă Weitzenböck, capitolul I).

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi formula (2.57).

Se constată imediat, prin calcul, că membrul drept al formulei (2.57) este invariant la schimbarea câmpului de repere de tip $(1,0)$, $\{V_1, ..., V_n\}$, ales pe un deschis $U \subseteq M$. Fie $x \in U$ un punct arbitrar fixat. Putem considera atunci $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în punctul x. Remarcăm imediat că $i(V_j)\omega^k = \delta^k_j$, *iar în punctul* x, avem $\nabla_{V_k}i(V_j) = i(V_j)\nabla_{V_k}, (\forall)j, k \in \{1, ..., n\}$. Atunci, *în punctul* x, se verifică succesiv egalităţile:

$$\partial\partial^* = -\sum_{i,j}^{n}\omega^i \wedge \nabla_{V_i}(i(V_j)\nabla_{V_{\overline{j}}}) = -\sum_{i,j}^{n}\omega^i \wedge i(V_j)\nabla_{V_i}\nabla_{V_{\overline{j}}} \tag{2.58}$$

$$\begin{gathered}\partial^*\partial = -\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}(i(V_j)\nabla_{V_{\overline{j}}})(\omega^i \wedge \nabla_{V_i}) = \\ -\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}[i(V_j)(\nabla_{V_{\overline{j}}}\omega^i) \wedge \nabla_{V_i} + i(V_j)(\omega^i \wedge \nabla_{V_{\overline{j}}}\nabla_{V_i})] = \\ -\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} i(V_j)(\omega^i \wedge \nabla_{V_{\overline{j}}}\nabla_{V_i}).\end{gathered} \tag{2.59}$$

Din (2.58), (2.59) deducem că, *în punctul* x, avem:

$$\partial\partial^* + \partial^*\partial =$$
$$= -\sum_{i=1}^n \nabla_{V_{\bar{i}}}\nabla_{V_i} + \sum_{i,j=1}^n [\omega^i \wedge i(V_j)\nabla_{V_{\bar{j}}}\nabla_{V_i} - \omega^i \wedge i(V_j)\nabla_{V_i}\nabla_{V_{\bar{j}}}]$$

deoarece $i(V_j)$ este antiderivare.

Având în vedere că, *în punctul* x, avem egalitatea $\nabla_{V_{\bar{i}}}\nabla_{V_i} = R_{V_{\bar{i}}V_i} + \nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}}$, şi $R_{V_iV_{\bar{i}}} = -R_{V_{\bar{i}}V_i}$, rezultă că, *în punctul* x, (2.57) este adevărată. Cum, conform lemei 11, se poate alege un câmp de repere de tip $(1,0)$, normal în orice punct, deducem că (2.57) este adevărată pe deschisul U. Egalitatea (2.56) se deduce prin conjugarea egalităţii (2.57).

Se demonstrează imediat egalitatea:

$$\Box = \overline{\Box} \tag{2.60}$$

Exerciţii.

1) Arătaţi că $\Box = \frac{1}{2}\Delta$.

Propoziţia 14. *Daca* φ *este formă de tip* $(p,0)$ *sau* (n,q) *cu* $0 \leq p,q \leq n$, *atunci, cu notaţiile anterioare, avem:*

$$\Box\varphi = -\sum_{i=1}^n \nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi. \tag{2.61}$$

Daca φ *este formă de tip* $(0,q)$ *sau* (p,n) *cu* $0 \leq p,q \leq n$, *atunci:*

$$\Box\varphi = \sum_{i=1}^n [-\nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi. + R_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi]. \tag{2.62}$$

Demonstraţie. Prin conjugare complexă orice formă de tip $(p,0)$, respectiv (n,q) devine formă de tip $(0,p)$ respectiv (q,n), oricare ar fi numerele naturale p,q, $0 \leq p,q \leq n$. Ca urmare, (2.62) se deduce prin conjugarea egalităţii (2.61). Se are în vedere, de asemenea, că membrul drept al formulelor (2.61), (2.62) este invariant la schimbarea câmpului de repere de tip $(1,0)$ ales, $\{V_1,...,V_n\}$. Fie $x \in U$ un punct fixat. Alegem $\{V_1,...,V_n\}$ câmp de repere de tip $(1,0)$ normal în punctul x. Ca urmare, *în punctul* x, au loc egalităţile:

$$\nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}} = \nabla_{V_i}\nabla_{V_{\bar{i}}}, R_{V_iV_{\bar{j}}} = \nabla_{V_i}\nabla_{V_{\bar{j}}} - \nabla_{V_{\bar{j}}}\nabla_{V_i}.$$

Vom demonstra acum formula (2.61).

Dacă φ este formă de tip $(p,0)$, atunci $R_{V_jV_{\bar{i}}}\varphi$ este de asemenea formă de tip $(p,0)$. Deci, în formula (2.56) avem:

$$\omega^{\bar{i}} \wedge i(V_{\bar{j}})R_{V_jV_{\bar{i}}}\varphi = 0, (\forall)i,j \in \{1,...,n\},$$

de unde rezultă (2.61).

Dacă ψ este formă de tip (n,q), atunci $\omega^i \wedge i(V_j) = \delta^i_j \psi$. Luând $\psi = R_{V_i V_{\bar{j}}}\varphi$, din (2.57), deducem (2.61). □

Oricare ar fi φ o $(p,q)-$ formă pe varietatea Kähler M, definim norma sa, notată $|\varphi|$, prin formula $|\varphi|^2 = <\varphi, \overline{\varphi}>$. Amintim că în Propoziţia 5, din capitolul I, am dedus expresia locală a laplacianului funcţiei $|\varphi|^2$, unde φ este o $p-$formă definită pe o varietate Riemann. Analog, cu notaţiile anterioare, pe o varietate Kähler, avem:

Propoziţia 15. *Dacă φ este o (p,q) formă pe varietatea Kähler M, atunci, local:*

$$\begin{aligned} -\Box |\varphi|^2 = & \textstyle\sum_{i=1}^n [|\nabla_{V_{\bar{i}}}\varphi|^2 + |\nabla_{V_i}\varphi|^2] + \\ & + \textstyle\sum_{i=1}^n [<\nabla^2_{V_i V_{\bar{i}}}\varphi, \overline{\varphi}> + <\varphi, \nabla^2_{V_i V_{\bar{i}}}\overline{\varphi}>]. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Demonstraţie. Deoarece $|\varphi|^2$ este o $(0,0)-$ formă, din (2.61) avem:

$$-\Box |\varphi|^2 = \sum_{i=1}^n \nabla^2_{V_i V_{\bar{i}}} |\varphi|^2 . \tag{2.64}$$

Alegem $\{V_1, ..., V_n\}$ câmp de repere de tip $(1,0)$ normal în punctul arbitrar fixat $x \in U$. Deducem, *în punctul* x :

$$\sum_{i=1}^n \nabla^2_{V_i V_{\bar{i}}} |\varphi|^2 = \sum_{i=1}^n \nabla_{V_i}\nabla_{V_{\bar{i}}} |\varphi|^2,$$

relaţie ce conduce la (2.63), având în vedere că:

$$\nabla_Z <\varphi, \overline{\varphi}> = <\nabla_Z\varphi, \overline{\varphi}> + <\varphi, \nabla_Z\overline{\varphi}>,$$

oricare ar fi Z un câmp de vectori complex.□

Vom spune că $(p,q)-$ forma φ este armonică dacă şi numai dacă $\Box\varphi = 0$.

Formula (2.63) se simplifică considerabil dacă φ este o $(p,0)$ sau $(0,q)-$ formă armonică. În adevăr, fie φ o $(p,0)-$formă armonică. Atunci $\overline{\varphi}$ va fi $(0,p)-$formă armonică. Ţinând seama de (2.61), respectiv (2.62) avem relaţiile:

$$\sum_{i=1}^n \nabla^2_{V_i V_{\bar{i}}}\varphi = 0, \sum_{i=1}^n \nabla^2_{V_i V_{\bar{i}}}\overline{\varphi} = \sum_{i=1}^n R_{V_i V_{\bar{i}}}\overline{\varphi},$$

care utilizate în (2.63), implică:

$$-\Box |\varphi|^2 = \sum_{i=1}^n [|\nabla_{V_{\bar{i}}}\varphi|^2 + |\nabla_{V_i}\varphi|^2 + <\varphi, R_{V_i V_{\bar{i}}}\overline{\varphi}>]. \tag{2.65}$$

Ultimul termen din formula (2.65) are o interpretare geometrică interesantă, pe care o dăm în cele ce urmează.

Fie $x \in M$ un punct arbitrar fixat. Aplicaţia $(\varphi, \psi) \to < \varphi, \overline{\psi} >$, cu φ,ψ două $(1,0)-$ forme conduce la un produs scalar hermitian, în spaţiul cotangent, în punctul x, complexificat. Ea se extinde în mod natural la forme de tip $(p, 0)$, oricare ar fi $p \in \{1, ..., n\}$.

Fie φ, ψ două $(p, 0)-$ forme arbitrare. Atunci:

$$< R_{V_i V_{\bar{i}}} \varphi, \overline{\psi} >= - < \varphi, R_{V_i V_{\bar{i}}} \overline{\psi} > . \tag{2.66}$$

În adevăr, deoarece $(\varphi, \psi) \to < \varphi, \overline{\psi} >$ este o funcţie, avem:

$$R_{V_i V_{\bar{i}}} < \varphi, \overline{\psi} >= 0 \tag{2.67}$$

şi, pe de altă parte:

$$\begin{gathered} R_{V_i V_{\bar{i}}} < \varphi, \overline{\psi} >= \nabla_{V_i}(V_{\bar{i}} < \varphi, \overline{\psi} >)- \\ -\nabla_{V_{\bar{i}}}(V_i < \varphi, \overline{\psi} >) - [V_i, V_{\bar{i}}] < \varphi, \overline{\psi} > . \end{gathered}$$

Folosind proprietatea conexiunii Levi-Civita de a fi metrică, rezultă:

$$R_{V_i V_{\bar{i}}} < \varphi, \overline{\psi} >=< R_{V_i V_{\bar{i}}} \varphi, \overline{\psi} > + < \varphi, R_{V_i V_{\bar{i}}} \overline{\psi} > \tag{2.68}$$

Din formulele (2.67), (2.68), urmează (2.66). Deci, putem scrie:

$$< R_{V_i V_{\bar{i}}} \varphi, \overline{\psi} >=< \varphi, \overline{R_{V_i V_{\bar{i}}} \psi} > .$$

Deci operatorul $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ este hermitian în raport cu produsul scalar hermitian pe $(p, 0)-$forme.

Considerăm endomorfismul $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ definit pe spaţiul cotangent în punctul $x \in M$. Atunci, valorile sale proprii vor fi reale. Pe de altă parte, dacă ξ este vector propriu corespunzător valorii proprii λ, atunci $J\xi$ are aceeaşi proprietate, deoarece varietatea M fiind varietate Kähler, deducem că $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} J\xi = J \sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \xi$. Ca urmare, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \mathbf{i}J\xi)$ este vector propriu corespunzător valorii proprii λ. Mai mult, deoarece $JV = \mathbf{i}V$, rezultă că V este de tip $(1, 0)$. Se observă că $\overline{\xi}$ este vector propriu al endomorfismului $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ ce corespunde valorii proprii $(-\lambda)$. În adevăr, $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \xi = \lambda\xi$ conduce prin conjugare complexă la $\sum_{i=1}^{n} \overline{R_{V_i V_{\bar{i}}} \xi} = \lambda\overline{\xi}$ şi cum $\overline{R_{V_i V_{\bar{i}}} \xi} = -R_{V_i V_{\bar{i}}} \overline{\xi}$, rezultă afirmaţia făcută. Ca urmare, $\overline{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \mathbf{i}J\xi)$ este vector propriu al endomorfismului $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$, corespunzător valorii proprii $(-\lambda)$. Mai mult, el este de tip $(0, 1)$. Există deci γ un covector real încât $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma - \mathbf{i}J\gamma)$, şi, ca urmare, $\overline{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \mathbf{i}J\gamma)$. Deci, g fiind metrica hermitiană pe M, din care provine metrica $<,>$, avem:

$$< V, \overline{V} >= g(\gamma, \gamma).$$

Putem alege însă pe γ încât $g(\gamma, \gamma) = 1$ şi rezultă $<V, \overline{V} >= 1$.

Fie acum V_λ subspaţiul vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda \in \mathbf{R}$, a endomorfismului $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ al spaţiului cotangent în punctul x, complexificat, $T_x^{*\mathbf{C}}M$. Am arătat mai sus că putem alege $V \in V_\lambda$ un vector de tip $(1,0)$, cu proprietatea $g(V, \overline{V}) = 1$. În plus, avem $\overline{V} \in V_{-\lambda}$ şi $\overline{V}$ este vector de tip $(0,1)$. Considerăm P_2 planul vectorial generat de $\{V, \overline{V}\}$. Forma biliniară simetrică $g_{|P_2}$este nedegenerată deoarece matricea ei asociată în reperul $\{V, \overline{V}\}$ este nedegenerată; ea este:

$$\begin{pmatrix} < V, V > & < V, \overline{V} > \\ < V, \overline{V} > & < \overline{V}, \overline{V} > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deducem că planul P_2 admite un complement ortogonal $P_2^{\perp}$ încât $T_x^{*\mathbf{C}}M = P_2 \oplus P_2^{\perp}$.

Pe de altă parte, restricţia endomorfismului $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ la $P_2^{\perp}$ este un endomorfism al lui $P_2^{\perp}$ şi are aceleaşi proprietăţi ca şi $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$. Se poate continua procedeul descris mai sus. După n paşi se obţine o bază $\{ \xi^1, ..., \xi^n, \xi^{\bar{1}}, ..., \xi^{\bar{n}}\}$ a lui $T_x^{*\mathbf{C}}M$ formată din vectori proprii ai endomorfismului $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ încât

$$< \xi^i, \xi^{\bar{j}} >= \delta_{ij}, \xi^1, ..., \xi^n \in T^{*1,0}M. \tag{2.69}$$

Considerăm $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}\ \xi^j = \lambda_j \xi^j$ (nu se sumeaza după j). Deoarece $\xi^1, ..., \xi^n$ sunt $1-$ forme de tip $(1,0)$, oricare ar fi $j \in \{1, ..., n\}$, există $1-$forma reală γ^j cu proprietatea $\xi^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^j - \mathrm{i}J\gamma^j)$.

Din (2.69) deducem că $\mathcal{B} = \{\gamma^1, J\gamma^1, ..., \gamma^n, J\gamma^n\}$ este o bază ortonormată în raport cu g_x a spaţiului cotangent în x la M.

Fie $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$ duala bazei $\mathcal{B}$, care este bază ortonormată în T_xM. Expresia $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ nu depinde de alegerea câmpului de repere $\{V_1, ..., V_n\}$ de tip $(1,0)$. Atunci, este indicat să alegem:

$$V_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j - \mathrm{i}Je_j), (\forall) j \in \{1, ..., n\}.$$

În punctul x, avem, oricare ar fi indicele $j \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} \lambda_j =& < \textstyle\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \xi^j, \xi^{\bar{j}} >= - < \sum_{i=1}^{n} R(e_i, Je_i)\gamma^j, J\gamma^j >= \\ &= - < \textstyle\sum_{i=1}^{n} R(e_i, Je_i)e_j, Je_j > . \end{aligned}$$

Din identitatea Bianchi, deducem:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} [< R(e_j, e_i)e_j, e_i > + < R(e_j, Je_i)e_j, e_i >].$$

Astfel, *în punctul* x, am demonstrat că

$$\lambda_j = -Ric(e_j, e_j), (\forall) j \in \{1, ..., n\}.$$

Amintim că $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ acţionează ca o derivare pe algebra tensorială. Este comod să utilzăm, *în punctul* x, scrierea $\varphi = \sum_I \varphi_I \xi^I$, unde $I = (i_1, ..., i_p), i_1 < ... < i_p, \varphi_I \in \mathbf{R}, \xi^I = \xi^{i_1} \wedge ... \wedge \xi^{i_p}$. Pentru a simplifica calculele, fără a restrânge generalitatea, vom considera $I = (1, ..., p)$. Atunci:

$$(\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}})\xi^I = \sum_{j=1}^{p} \xi^1 \wedge ... \wedge (\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}})\xi^j \wedge ... \wedge \xi^p = (\lambda_1 + ... + \lambda_p)\xi^I.$$

Se observă că $\{\xi^I\}_I$ este o bază ortonormată în raport cu produsul scalar $<,>$ pe spaţiul formelor de tip $(p,0)$, în punctul x. Ca urmare, oricare ar fi o $(p,0)$ formă φ, în punctul x avem:

$$< \varphi, \sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \overline{\varphi} >= - < \sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \varphi, \overline{\varphi} >= - \sum_I (\sum_{j \in I} \lambda_j) \mid \varphi_I \mid^2,$$

de unde:

$$< \varphi, \sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \overline{\varphi} >= \sum_I \mid \varphi_I \mid^2 \sum_{j \in I} Ric(e_j, e_j).$$

Cum însă, oricare ar fi indicele $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\lambda_j =< \sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} \xi^j, \xi^{\bar{j}} >=< \sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}} V_j, V_{\bar{j}} >,$$

putem considera λ_j valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu $V_j, (\forall) j \in \{1, ..., n\}$. Cu notaţiile anterioare, avem:

Teorema 16. *Fie* M *o varietate Kähler de dimensiune reală* $2n$. *Considerăm* $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$ *o bază ortonormată din* T_xM, *cu proprietatea că vectorii complecşi de tip* $(1,0)$:

$$V_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j - \mathbf{i} Je_j), j \in \{1, ..., n\}$$

sunt vectori proprii ai endomorfismului $\sum_{i=1}^{n} R_{V_i V_{\bar{i}}}$ *al lui* T_xM *corespunzători respectiv valorilor proprii reale* $\lambda_j, j \in \{1, ..., n\}$.

Fie $\{\xi^1, ..., \xi^n\}$ *duala bazei* $\{V_1, ..., V_n\}$, *de tip* $(1,0)$. *Dacă* $\varphi = \sum_I \varphi_I \xi^I$ *este o* $(p,0)$*- formă armonică, atunci:*

$$\begin{aligned} -\Box \mid \varphi \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} [\mid \nabla_{V_{\bar{i}}} \varphi \mid^2 + \mid \nabla_{V_i} \varphi \mid^2] + \\ + \sum_I (\sum_{j \in I} Ric(e_j, e_j)) \mid \varphi_I \mid^2 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Conjugata complexă a unei $(0,p)-$forme este o $(p,0)-$ formă.

Având în vedere faptul că $\mid \varphi \mid = \mid \overline{\varphi} \mid$, deducem că (2.70) este adevărată şi pentru $(0,p)-$ forme.

Este cunoscut [10] că pe o varietate Kähler $^*\Box = \Box^*$, unde * este operatorul lui Hodge, complex. Dacă φ este o $(n,q)-$ formă, atunci $^*\varphi$ este o $(n-q,0)-$ formă, de unde deducem că (2.70) este adevărată şi pentru (n,q) şi (p,n) forme.

Pentru a putea enunţa un nou rezultat de tehnică Bochner, pe o varietate Kähler, definim acum noţiunea de *curbură bisecţională.* Fie v, w vectori unitari din spaţiul tangent în punctul $x \in M$, unde M este o varietate Kähler de dimensiune reală $2n$. Prin definiţie, curbura bisecţională $B(v,w)$ a planului $Sp\{v,w\}$ este:

$$B(v,w) = - < R(v,Jv)w, Jw > . \tag{2.71}$$

Observaţia următoare ne arată motivul pentru care $B(v,w)$ poartă numele de curbură bisecţională.

Din identitatea lui Bianchi, rezultă:

$$< R(v,Jv)w, Jw > = < R(w,v)w, v > + < R(v,Jw)v, Jw > .$$

Deci $B(v,w)$ este suma a două curburi secţionale.

Recomandăm urmărirea atentă a proprietăţilor expuse în setul de exerciţii de mai jos. Ele se vor utiliza ulterior.

Exerciţii

1) Fie $V = V_1 + \mathrm{i}V_2$ un vector complex unde $V_1, V_2 \in T_xM$. Vom spune că V_1 este partea reală a vectorului V şi vom nota $V_1 = ReV$. Atunci, oricare ar fi $V, W \in T_x^{\mathbf{C}}M$ doi vectori de tip $(1,0)$ cu proprietatea $< ReV, ReV > = < ReW, ReW > = 1$, avem:

$$B(ReV, ReW) = \frac{1}{4} < R(V,\overline{V})W, \overline{W} > . \tag{2.72}$$

Indicaţie. Verificarea egalităţii (2.72) se face prin calcul, folosind (2.71).

2) Tensorul de curbură R al unei metrici Kähler are următoarele proprietăţi: dacă $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp de repere de tip $(1,0)$, iar $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ este câmpul său dual de corepere, atunci

$$\begin{aligned} R(V_i,\overline{V_j})V_k = \textstyle\sum_{l=1}^n R_{ijkl}V_l, R(V_i,\overline{V_j})\omega^k = \\ = - \textstyle\sum_{l=1}^n R_{ijlk}\omega^l, R(V_i,\overline{V_j})\omega^{\overline{k}} = \textstyle\sum_{l=1}^n R_{ijkl}\omega^{\overline{l}}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

$$R(V_i,\overline{V_j})\overline{V_k} = -\sum_{l=1}^{n} R_{ijlk}\overline{V_l}, R_{ijkl} = R_{ilkj}, R_{ijkl} = \overline{R_{jilk}}, \tag{2.74}$$

$$R_{ijkl} = R_{kjil}, R_{ijkl} = R_{klij}, \tag{2.75}$$

Teorema 17. *Fie M o varietate Kähler, compactă, cu curbura bisecţională nenegativă. Atunci, orice $(1,1)-$ formă armonică reală pe M este paralelă. Dacă curbura bisecţională este quasi-pozitivă, orice $(1,1)-$ forma armonică reală este multiplu real de forma Kähler.*

Demonstraţie. Fie φ o $(1,1)-$ formă armonică, reală. Deci, $\varphi=\overline{\varphi}$ şi din (2.57), (2.56) avem, cu notaţiile din teorema 13, respectiv:

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi-\sum_{i=1}^{n}R_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi+\sum_{i,j=1}^{n}\omega^i\wedge i(V_j)R_{V_iV_{\bar{j}}}\varphi=0 \tag{2.76}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi+\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})R_{V_jV_{\bar{i}}}\varphi=0. \tag{2.77}$$

Cum, din (2.63) avem:

$$\square\mid\varphi\mid^2=-\sum_{i=1}^{n}[\mid\nabla_{V_{\bar{i}}}\varphi\mid^2+\mid\nabla_{V_i}\varphi\mid^2]-2\sum_{i=1}^{n}<\nabla^2_{V_iV_{\bar{i}}}\varphi,\overline{\varphi}>,$$

rezultă din (2.77):

$$-\square\mid\varphi\mid^2=\sum_{i=1}^{n}[\mid\nabla_{V_{\bar{i}}}\varphi\mid^2+\mid\nabla_{V_i}\varphi\mid^2]+2<\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})R_{V_jV_{\bar{i}}}\varphi,\varphi>. \tag{2.78}$$

Introducem acum notaţia:

$$F(\varphi)=<\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})R_{V_jV_{\bar{i}}}\varphi,\varphi>.$$

Deoarece φ este $(1,1)-$ formă reală, există local $(1,0)-$ formele $\{\theta^1,...,\theta^n\}$ cu proprietatea $<\theta^i,\theta^{\bar{j}}>=\delta_{ij},(\forall)i,j\in\{1,...,n\}$, astfel încât $\varphi=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\theta^i\wedge\theta^{\bar{i}}$, unde $\varphi_1,...,\varphi_n$ sunt funcţii continui cu valori reale. Cum câmpul de repere $\{\omega^1,...,\omega^n\}$ este arbitrar, putem alege $\omega^i(x)=\theta^i(x)$ oricare ar fi indicele $i\in\{1,...,n\}$, unde x este un punct arbitrar fixat. Deci, *în punctul* x, avem $\varphi=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\omega^i\wedge\omega^{\bar{i}}$ şi, ca urmare, utilizând (2.73), rezultă:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})R_{V_jV_{\bar{i}}}\varphi&=\tfrac{\mathrm{i}}{2}\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n}\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})R_{V_jV_{\bar{i}}}(\varphi_k\omega^k\wedge\omega^{\bar{k}})=\\ &=\tfrac{\mathrm{i}}{2}\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_k\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})[R_{V_jV_{\bar{i}}}\omega^k\wedge\omega^{\bar{k}}+\omega^k\wedge R_{V_jV_{\bar{i}}}\omega^{\bar{k}}]=\\ &=-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_k\omega^{\bar{i}}\wedge i(V_{\bar{j}})[R_{jilk}\omega^l\wedge\omega^{\bar{k}}+\omega^k\wedge R_{jikl}\omega^{\bar{l}}]=\\ &=\tfrac{\mathrm{i}}{2}\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_k[R_{kilk}\omega^{\bar{i}}\wedge\omega^l-R_{jikj}\omega^{\bar{i}}\wedge\omega^k].\end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned}F(\varphi)&=-\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,j,k,s=1}^{n}(R_{kilk}\varphi_k\varphi_s\delta^i_s\delta^l_s-R_{jikj}\varphi_k\varphi_s\delta^i_s\delta^k_s)=\\ &-\tfrac{1}{4}[\textstyle\sum_{k,s=1}^{n}R_{kssk}\varphi_k\varphi_s-\sum_{j,s=1}^{n}R_{jssj}(\varphi_s)^2].\end{aligned}$$

Din (2.75), urmează acum:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= -\tfrac{1}{4}[\textstyle\sum_{k,s=1}^{n} R_{sskk}\varphi_k\varphi_s - \sum_{j,s=1}^{n} R_{ssjj}(\varphi_s)^2] = \\ &= \tfrac{1}{8}\textstyle\sum_{j,s=1}^{n}[-2R_{ssjj}\varphi_j\varphi_s + R_{ssjj}(\varphi_s)^2 + R_{jjss}(\varphi_j)^2] = \\ &= \tfrac{1}{8}\textstyle\sum_{j,s=1}^{n} R_{ssjj}(\varphi_j - \varphi_s)^2. \end{aligned}$$

Din (2.78) deducem:

$$-\Box \mid \varphi \mid^2 = \sum_{i=1}^{n}[\mid \nabla_{V_{\bar{i}}}\varphi \mid^2 + \mid \nabla_{V_i}\varphi \mid^2] + \frac{1}{4}\sum_{j,s=1}^{n} R_{ssjj}(\varphi_j - \varphi_s)^2.$$

Acum, din (2.72) avem:

$$B(ReV_s, ReV_j) = \frac{1}{4}R_{ssjj},$$

iar din ipoteza teoremei deducem $R_{ssjj} \geq 0$, oricare ar fi indicii $s, j \in \{1, ..., n\}$. Ca urmare, $-\Box \mid \varphi \mid^2 \geq 0$, *în punctul* x, arbitrar fixat, de unde $-\Box \mid \varphi \mid^2 \geq 0$ pe tot deschisul considerat. Din principiul maximului al lui Hopf, avem deci

$$\nabla_{V_i}\varphi = \nabla_{V_{\bar{i}}}\varphi = 0, (\forall) i \in \{1, ..., n\},$$

adică φ este paralelă. În plus,

$$\sum_{j,s=1}^{n} R_{ssjj}(\varphi_j - \varphi_s)^2 = 0.$$

Presupunând că există un punct x cu proprietatea că $-R_{ssjj}(x) > 0$, rezultă $\varphi_j(x) = \varphi_s(x), (\forall) j, s \in \{1, ..., n\}$. Notăm $\alpha = \varphi_1(x) = ... = \varphi_n(x)$. Observăm că $\alpha \in \mathbf{R}$, deoarece $(1,1)-$ forma φ este reală. Forma Kähler pe M fiind $\Phi = -\mathbf{i}\sum_{j=1}^{n}\omega^j \wedge \omega^{\bar{j}}$, deducem că $\varphi(x) = \alpha\Phi(x)$. Fie acum $(1,1)$ forma $\varphi - \alpha\Omega$. Ea este paralelă şi nulă în x. Rezultă că ea este nulă, deci $\varphi = \alpha\Omega, \alpha \in \mathbf{R}$.

3

Algebre Clifford

Generalităţi

Noţiunea de algebră Clifford este indispensabilă pentru construcţia unor structuri având ca bază o varietate Riemann ca, de exemplu, fibrarea Clifford sau eventuale structuri spinoriale. Introducerea acestor structuri va permite definirea operatorului Dirac care joacă, pe aceste structuri, un rol asemănător cu operatorul Laplace, studiat anterior. Unele rezultate de tip Bochner obţinute în capitolele precedente capătă demonstraţii mult mai elegante utilizând formalismul Clifford.

Definiţie [3]. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K, de caracteristică diferită de 2 şi $Q : V \to K$ forma patratică asociată formei biliniare simetrice $B : V \times V \to K$.

Se numeşte *algebră Clifford asociată formei patratice* Q şi se notează $C(Q)$ o algebră asociativă peste corpul K,cu element unitate 1, cu următoarele proprietăţi:

$i)$ Există $\theta : V \to C(Q)$ o aplicaţie liniară cu proprietatea

$$(\theta(x))^2 = -Q(x)1, (\forall)x \in V;$$

$ii)$ Oricare ar fi algebra asociativă A peste corpul K, cu element unitate 1 şi aplicaţia liniară $u : V \to A$ cu proprietatea

$$(u(x))^2 = -Q(x)1, (\forall)x \in V,$$

rezultă că există un morfism de algebre unic $u' : C(Q) \to A$ ce face comutativă diagrama:

$$
\begin{array}{ccc}
 & C(Q) & \\
\theta \nearrow & & \searrow u' \\
V & \xrightarrow{u} & A
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Teorema 1. *Dacă există, algebra Clifford $C(Q)$ este unică până la un izomorfism.*

Demonstraţie. Presupunem că există $C(Q)$ şi $C(Q)'$ algebre Clifford asociate formei patratice $Q : V \to K$. Notăm cu $\theta : V \to C(Q)$ respectiv $\theta' : V \to C(Q)'$ aplicaţiile liniare date de proprietatea $i)$ din definiţia algebrei Clifford $C(Q)$, respectiv $C(Q)'$.

Utilizând proprietatea $ii)$ din definiţia algebrei Clifford $C(Q)$, cu algebra $A = C(Q)'$ şi aplicaţia liniară $u = \theta' : V \to C(Q)'$, rezultă că există în mod unic un morfism de algebre $u' : C(Q) \to C(Q)'$ cu proprietatea $u' \circ \theta = \theta'$.

Inversând acum rolul celor două algebre Clifford $C(Q)$ şi $C(Q)'$ rezultă un unic morfism de algebre $u'' : C(Q)' \to C(Q)$ cu proprietatea că $u'' \circ \theta' = \theta$.

Deducem că $u'' \circ u' \circ \theta = \theta$ şi $u' \circ u'' \circ \theta' = \theta'$. Rezultă $u' \circ u'' = Id_{C(Q)'}$ şi $u'' \circ u' = Id_{C(Q)}$. În adevăr, de exemplu egalitatea $u' \circ u'' = Id_{C(Q)'}$ rezultă astfel: considerând în proprietatea $ii)$ din definiţia algebrei Clifford $C(Q)'$, algebra $A = C(Q)'$, iar aplicaţia liniară $u = \theta'$, deducem că $Id_{C(Q)'}$ este unicul morfism de algebre cu proprietatea $Id_{C(Q)'} \circ \theta' = \theta'$. Atunci, din egalitatea $u' \circ u'' \circ \theta' = \theta'$ deducem că $u' \circ u'' = Id_{C(Q)'}$.

Am demonstrat astfel că morfismele de algebre u', u'' sunt unul inversul celuilalt, deci sunt izomorfisme. Ca urmare algebrele $C(Q)$ şi $C(Q)'$ sunt izomorfe.□

Dăm în continuare demonstraţia teoremei de existenţă a algebrei Clifford $C(Q)$ din [3].

Teorema 2. *Oricare ar fi forma patratică $Q : V \to K$ definită pe spaţiul vectorial V peste corpul comutativ K, de caracteristică diferită de 2, există algebra Clifford $C(Q)$.*

Demonstraţie. Fie algebra tensorială a lui V :

$$T(V) = K \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ...$$

şi $I(Q)$ idealul bilateral generat, în această algebră, de către elementele de forma $x \otimes x + Q(x).1, x \in V$. Vom demonstra că $C(Q)$ este izomorfă cu algebra $T(V)/I(Q)$. În adevăr, fie $p : T(V) \to T(V)/I(Q)$ morfismul canonic şi $i : V \to T(V)$ incluziunea. Atunci aplicaţia $\theta = p \circ i$ are proprietăţile cerute de $i)$ din definiţia algebrei Clifford. Oricare ar fi vectorul $x \in V$, avem:

$$(\theta(x))^2 = (p \circ i)(x)(p \circ i)(x) = p(x)p(x) = p(x \otimes x) = -Q(x).1.$$

Fie o aplicaţie liniara $u : V \to A$, cu proprietatea $(u(x))^2 = -Q(x).1$, A fiind o algebră asociativă cu element unitate 1, peste corpul K. Din proprietatea de universalitate a algebrei tensoriale $T(V)$, există morfismul unic de algebre $u'' : T(V) \to A$ ce face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & T(V) & & \\ & i \nearrow & & \searrow u'' & \\ V & & \xrightarrow{u} & & A \end{array}.$$

Pe $I(Q)$ avem $u'' = 0$. Atunci, există un morfism unic de algebre ce închide diagarama:

$$\begin{array}{ccccc} & & T(V)/I(Q) & & \\ & p \nearrow & & \searrow u' & \\ T(V) & & \xrightarrow{u''} & & A \end{array}$$

Avem, oricare ar fi vectorul $x \in V$:

$$u'(\theta(x)) = u'(p(x)) = u''(x) = u(x),$$

deci u' este morfismul de algebre cerut de proprietatea $ii)$ din definiţia algebrei Clifford. În concluzie algebra Clifford $C(Q)$ este izomorfă cu $T(V)/I(Q)$.□

Este de observat că rezultatele de mai sus sunt valabile atât în cazul finit dimensional cât şi în cazul infinit dimensional.

Vom utiliza în continuare numai cazul finit dimensional. Pentru a putea deduce dimensiunea algebrei Clifford, în acest caz, este util de considerat noţiunea de produs tensorial $\mathbf{Z_2}-$ graduat de algebre $\mathbf{Z}_2$-graduate.

Fie $A = A_0 \oplus A_1$ şi $B = B_0 \oplus B_1$ două algebre $\mathbf{Z}_2-$ graduate asociative, cu element unitate. Algebra $C = A \hat{\oplus} B$ este algebra $\mathbf{Z}_2$-graduată $C = C_0 \oplus C_1$, unde:

$$C_0 = (A_0 \otimes B_0) \oplus (A_1 \otimes B_1), C_1 = (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0),$$

iar produsul este definit prin formula:

$$\begin{gathered}(a \otimes b_j)(a_i \otimes b) = (-1)^{ij} a a_i \otimes b_j b, \\ (\forall) a \in A, b \in B, a_i \in A_i, b_j \in B_j, i, j \in \mathbf{Z}_2.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Se demonstrează imediat că C este o algebră asociativă cu element unitate $1 = 1' \otimes 1''$, unde $1', 1''$ reprezintă elementul unitate din A respectiv B. Produsul tesorial $\mathbf{Z}_2-$ graduat de algebre $\mathbf{Z}_2$- graduate este asociativ.

Pe de altă parte, fie un corp K şi $\alpha \in K$ un element fixat. Se consideră algebra bidimensională $\mathbf{Z}_2-$ graduată $K(\alpha) = K\mathbf{1} \oplus Kf$ unde

$\mathbf{1}$ este elementul unitate al algebrei şi $f^2 = \alpha\mathbf{1}$. De exemplu, când corpul K coincide cu corpul real $\mathbf{R}$, atunci $\mathbf{R}(-1) \simeq \mathbf{C}$.

Următoarea teoremă este foarte utilă pentru studiul algebrelor Clifford finit dimensionale.

Teorema 3. *Fie scalarii* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *din corpul* K. *Algebra* $\mathbf{Z}_2-$ *graduată* $A = K(\alpha_1) \hat{\otimes} ... \hat{\otimes} K(\alpha_n)$ *are dimensiunea* 2^n. *Dacă* $K(\alpha_i) = K\mathbf{1} \oplus K f_i, f_i^2 = \alpha_i \mathbf{1}, (\forall) i \in \{1, ..., n\}$, *o bază a algebrei* A *este*

$$\mathcal{B} = \{e_{i_1}, ...e_{i_s}\}_{\substack{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n \\ s=0,1,...,n}} \tag{3.3}$$

unde *pentru* $s = 0$ *se consideră prin convenţie elementul unitate al algebrei* A, *iar*

$$e_i = \mathbf{1} \otimes ...\mathbf{1} \otimes f_i \otimes \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1}, n - factori (\forall) i \in \{1, ..., n\}, \tag{3.4}$$

f_i *ocupând locul* i *în definirea elementului* e_i. *Mai mult, avem formulele de calcul:*

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\alpha_i \delta_{ij} \mathbf{1}_A, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}, \tag{3.5}$$

$\mathbf{1}_A = \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1}$ (n *factori*) *fiind elementul unitate din algebra* A.

Ca algebră $\mathbf{Z}_2-$ *graduată, algebra* A *se scrie* $A = A_0 \oplus A_1$, *unde spaţiul vectorial* A_0 *este generat* de *elementele din baza* $\mathcal{B}$ *cu* s *par iar spaţiul vectorial* A_1 *este generat de elementele din baza* $\mathcal{B}$ *cu* s *impar.*

Demonstraţie. Se procedează prin inducţie după n. Dacă $n = 1$, concluzia teoremei este evident adevărată deoarece, în acest caz, $e_1 = f_1$. Presupunem adevărată concluzia teoremei pentru algebra

$$B = K(\alpha_1) \hat{\otimes} ... \hat{\otimes} K(\alpha_{n-1}).$$

Conform ipotezei de inducţie, o bază a algebrei B este

$$\mathcal{B}' = \{g_{i_1} ... g_{i_s}\}_{\substack{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n-1 \\ s=0,1,...,n-1}}$$

unde

$$g_i = \mathbf{1} \otimes ...\mathbf{1} \otimes f_i \otimes \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1}, n-1 \; factori (\forall) i \in \{1, ..., n-1\},$$

f_i ocupând locul i în definirea elementului g_i. Tot din ipoteza de inducţie, sunt valabile formulele de calcul:

$$g_i g_j + g_j g_i = 2\alpha_i \delta_{ij} \mathbf{1}_B, (\forall) i, j \in \{1, ..., n-1\}, \tag{3.6}$$

$\mathbf{1}_B = \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1}$ ($n - 1$ factori) fiind elementul unitate din algebra B. Avem $A = B \hat{\otimes} K(\alpha_n)$, deci spaţiul vectorial A fiind produsul tensorial al spaţiilor vectoriale B şi $K(\alpha_n)$ va admite o bază

$$\mathcal{B}'' = \{g_{i_1} ... g_{i_s} \otimes \mathbf{1}, g_{i_1} ... g_{i_s} \otimes f_n, \mathbf{1}_B \otimes f_n, \mathbf{1}_B \otimes \mathbf{1}\}_{\substack{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n-1 \\ s=1,...,n-1}}. \tag{3.7}$$

Se observă fără nici o dificultate că $\mathcal{B} = \mathcal{B}''$. În adevăr, $card\mathcal{B} = card\mathcal{B}''$ şi au loc egalităţile:

$$g_{i_1}...g_{i_s} \otimes \mathbf{1} = (g_{i_1} \otimes \mathbf{1})...(g_{i_s} \otimes \mathbf{1}) = e_{i_1}...e_{i_s},$$
$$\mathbf{1}_B \otimes f_n = e_n, \mathbf{1}_B \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}_A,$$
$$g_{i_1}...g_{i_s} \otimes f_n = (g_{i_1} \otimes \mathbf{1})...(g_{i_s} \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1}_B \otimes f_n) = e_{i_1}...e_{i_s}e_n,$$
$$(\forall)_{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n-1}, s = 0, 1, ..., n-1.$$

Având în vedere formula (3.6) se deduce formula (3.5). În adevăr, pentru $i, j \in \{1, ..., n-1\}$, avem:

$$e_ie_j + e_je_i = (g_i \otimes \mathbf{1})(g_j \otimes \mathbf{1}) + (g_j \otimes \mathbf{1})(g_i \otimes \mathbf{1}) =$$
$$(g_ig_j + g_jg_i) \otimes \mathbf{1} = 2\alpha_i\delta_{ij}\mathbf{1}.$$

Avem de asemenea, pentru orice $i \in \{1, ..., n-1\}$:

$$e_ie_n + e_ne_i = (g_i \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1}_B \otimes f_n) + (\mathbf{1}_B \otimes f_n)(g_i \otimes \mathbf{1}) =$$
$$g_i \otimes f_n - g_i \otimes f_n = 0$$

având în vedere că elementul unitate al oricărei algebre graduate face parte din componenta 0 a algebrei iar $g_i \in B_0$ (din ipoteza de inducţie), f_n fiind din componenta 1 a algebrei $K(\alpha_n)$, conform definiţiei acesteia (vezi de asemenea formula (3.2)).

Ultima afirmaţie din concluzia teoremei este evidentă deoarece o baza avem $\mathcal{B} = \mathcal{B}''$, cu $\mathcal{B}''$ dată de formula (3.7).□

Teorema 4. *Fie K−spaţiul vectorial de dimensiune finită n, cu caracteristica corpului K diferită de 2, dotat cu forma patratică $Q : V \to K$ a cărei formă polară o notăm B. Fie $\{f_1, ..., f_n\}$ o bază ortogonală în raport cu Q a lui V, încât $B(f_i, f_j) = -\alpha_i\delta_{ij}, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}$. Atunci:*

$$C(Q) \simeq K(\alpha_1) \hat{\otimes} ... \hat{\otimes} K(\alpha_{n-1}).$$

Demonstraţie. Vom demonstra că algebra

$$A = K(\alpha_1) \hat{\otimes} ... \hat{\otimes} K(\alpha_n)$$

are proprietăţile $i), ii)$ din definiţia algebrei Clifford $C(Q)$.

Considerăm aplicaţia

$$\theta : V \to A, \theta(f_i) = e_i, (\forall)i \in \{1, ..., n\},$$

elementul e_i fiind definit prin formula (3.4) şi extindem aplicaţia θ prin liniaritate. Oricare ar fi vectorul $x \in V, x = \sum_{i=1}^n x^i f_i$, deducem:

$$(\theta(x))^2 = \sum_{i,j=1}^n x^ix^je_ie_j =$$
$$= \sum_{i=1}^n (x^i)^2e_i^2 + \sum_{i<j} x^ix^j(e_ie_j + e_je_i).$$

Din formula (3.5), avem:

$$\theta(x))^2 = -[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x^i)^2] \mathbf{1}_A = -Q(x)\mathbf{1}_A.$$

Deci aplicaţia liniară θ îndeplineşte condiţia $i)$ din definiţia algebrei Clifford $C(Q)$.

Cu scopul de a arăta că algebra A verifică şi proprietatea $ii)$ de definire a algebrei Clifford $C(Q)$, să considerăm o $K-$algebră B, asociativă, cu elementul unitate 1 şi $u : V \to B$ o aplicaţie liniară cu proprietatea $(u(x))^2 = -Q(x)1, (\forall)x \in V$. Se pune problema de a arăta că există un unic morfism de algebre $u' : A \to B$ cu proprietatea că $u' \circ \theta = u$. O bază a algebrei A este $\mathcal{B}$ dată prin formulele (3.3), (3.4). Definim aplicaţia $u' : A \to B$ pe această bază, apoi o extindem prin liniaritate. Punem:

$$u'(e_{i_1} ... e_{i_s}) = u(f_{i_1})...u(f_{i_s}),$$
$$(\forall) 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s = 0, 1, ..., n.$$

Deoarece avem $(u(x))^2 = -Q(x)1, (\forall)x \in V$, rezultă:

$$u(f_i)u(f_j) + u(f_j)u(f_i) = 2\alpha_i \delta_{ij} \mathbf{1}_A, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\},$$

adică formule asemănătoare cu formulele (3.5). De aci deducem că u' este morfism de algebre. Mai mult, din definiţie, $u' \circ \theta = u$. Unicitatea morfismului de algebre $u' : A \to B$ rezultă din construcţia sa. □

Observaţii

1) Aplicaţia liniară $\theta : V \to C(Q)$ ce îndeplineşte proprietatea $i)$ din definiţia algebrei Clifford $C(Q)$ este injectivă, cum rezultă din teorema 4. De aceea, vom considera spaţiul vectorial inclus în mod canonic în algebra Clifford $C(Q)$, aplicaţia liniară $\theta : V \to C(Q)$ fiind incluziunea.

2) Dacă $\dim V = n$, atunci $\dim C(Q) = 2^n$. Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază a lui V ortogonală în raport cu forma patratică Q, o bază a algebrei Clifford $C(Q)$ este $\mathcal{B}$, dată prin formula (3.3).

3) Algebra Clifford $C(Q)$ este $\mathbf{Z}_2-$ graduată şi anume,

$$C(Q) = C(Q)^0 \oplus C(Q)^1$$

unde spaţiul vectorial $C(Q)^0$ este generat de elementele din baza $\mathcal{B}$, cu s par iar spaţiul vectorial $C(Q)^1$ este generat de elementele din baza $\mathcal{B}$, cu s impar. Mai mult, $C(Q)^0$ este subalgebră a algebrei $C(Q)$.

4) Oricare ar fi $x, y \in V$, se verifică egalitatea:

$$xy + yx = -2B(x, y).1. \tag{3.8}$$

5) În particular, dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază ortonormată în raport cu Q a spaţiului vectorial real V, încât oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$ avem $B(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}, \epsilon_i \in \{-1, 1\}$, atunci:

$$e_ie_j + e_je_i = -2\epsilon_i\delta_{ij}, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}. \quad (3.9)$$

Exemple

1) Fie $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, forma patratică dată de $Q(x) = x^2, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Algebra Clifford $C(Q)$ corespunzătoare este bidimensională. Fie $e = 1$ baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbf{R}$. O bază a lui $C(Q)$ este $\{1, e\}$. Avem:

$$e^2 = -1,$$

şi rezultă $C(Q)$ algebră izomorfă cu algebra $\mathbf{C}$ a numerelor complexe.

2) Fie $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, forma patratică standard, $Q(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2, (\forall)x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Baza canonică $\{e_1, e_2\}$ a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^2$ fiind ortonormată în raport cu Q, deducem că o bază a algebrei Clifford $C(Q)$ este $\mathcal{B} = \{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$. Legea de multiplicare a algebrei Clifford $C(Q)$, urmare a proprietăţii (3.8), implică:

$$e_1^2 = e_2^2 = (e_1e_2)^2 = -1$$
$$e_1e_2 = -e_2e_1, e_1(e_1e_2) = -(e_1e_2)e_1 = -e_2,$$
$$e_2(e_1e_2) = -(e_1e_2)e_2 = e_1.$$

Se observă imediat că $C(Q)$ este algebră izomorfă cu algebra $\mathbf{H}$ a quaternionilor, un izomorfism al lor fiind dat de aplicaţia $f : C(Q) \to \mathbf{H}$, dată de:

$$f(1) = \mathbf{1}, f(e_1) = \mathbf{i}, f(e_2) = \mathbf{j}, f(e_1e_2) = \mathbf{k}$$

unde $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este baza canonică a algebrei quaternionilor.

3) Dacă forma patratică Q este identic nulă, atunci algebra $C(Q)$ este izomorfă cu algebra exterioară ΛV

Se demonstrează imediat:

Propoziţia 5. *Există un izomorfism unic de spaţii vectoriale $h : C(Q) \to \Lambda V$ cu proprietatea:*

$$\begin{gathered} h(e_{i_1}...e_{i_s}) = e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_s}, \\ 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, ..., n\}, e_0 = 1, \end{gathered} \quad (3.10)$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază ortonormată în raport cu Q a spaţiului vectorial V.

Demonstraţia este un simplu exerciţiu de algebră liniară.

Este totuşi de remarcat că h nu este un izomorfism între algebrele $C(Q)$ şi ΛV dacă forma patratică Q *nu este* identic nulă. Dacă h ar fi izomorfism de algebre, oricare ar fi vectorul $x \in V$ ar urma egalitatea $h(x^2) = h(x) \wedge h(x) = 0$ sau $Q(x) = 0$, adică forma patratică Q ar fi identic nulă, ceeace este fals.

Propoziţia 6. *Există un unic automorfism $\alpha : C(Q) \to C(Q)$ cu proprietatea că $\alpha(x) = -x, (\forall)x \in V$.*

Demonstraţie. Aplicaţia $\alpha : V \to C(Q), \alpha(x) = -x$ este liniară şi verifică proprietatea $(\alpha(x))^2 = -Q(x)1$. Ca urmare a proprietăţii de universalitate a algebrei Clifford, deducem că există un morfism de algebre unic $\tilde{\alpha} : C(Q) \to C(Q)$ ce face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & C(Q) & \\ \theta \nearrow & & \searrow \tilde{\alpha} \\ V & \overset{\alpha}{\to} & C(Q) \end{array}$$

Rezultă

$$\tilde{\alpha}(e_{i_1}...e_{i_s}) = (-1)^s e_{i_1}...e_{i_s}, (\forall) i \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s = 0, 1, ..., n,$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază ortogonală în raport cu Q a lui V. Ca urmare, $\tilde{\alpha} : C(Q) \to C(Q)$ este un automorfism. Se notează $\tilde{\alpha}$ cu α.□

Observăm că $\alpha^2 = Id_{C(Q)}$ iar

$$C(Q)^0 = \{g \in C(Q) \mid \alpha(g) = g\}, C(Q)^1 = \{g \in C(Q) \mid \alpha(g) = -g\}.$$

Automorfismul $\alpha : C(Q) \to C(Q)$, dat mai sus, poartă numele de *automorfismul canonic* al algebrei Clifford $C(Q)$.

Algebra Clifford $C(Q)$ posedă de asemenea un antiautomorfism $\beta : C(Q) \to C(Q)$ pe care îl definim mai jos. Facem următoarea observaţie preliminară: dacă A este o $K-$ algebră, spaţiul vectorial A poate fi dotat cu o nouă structură de algebră $\widehat{A}$ cu multiplicarea $* : AXA \to A$ dată de formula:

$$x * y = yx, (\forall) x, y \in A,$$

unde juxtapunerea din membrul drept reprezintă produsul în algebra dată A. Dacă algebra A este comutativă, atunci $A = \widehat{A}$.

Fie acum algebra Clifford $C(Q)$. Considerăm algebra $\widehat{C(Q)}$. Notăm $\theta : V \to C(Q)$ incluziunea. Avem:

$$\theta(x) * \theta(x) = \theta(x)\theta(x) = -Q(x)1,$$

deci există un unic morfism de algebre $\beta : C(Q) \to \widehat{C(Q)}$ care face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & C(Q) & \\ \theta \nearrow & & \searrow \beta \\ V & \overset{\theta}{\to} & \widehat{C(Q)} \end{array}.$$

Rezultă

$$\beta(e_{i_1}...e_{i_s}) = e_{i_s}...e_{i_1} = (-1)^{s(s-1)/2} e_{i_1}...e_{i_s},$$
$$(\forall) i \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s = 0, 1, ..., n,$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază ortogonală în raport cu Q a lui V. Ca urmare, β: $C(Q) \to \widehat{C(Q)}$ este un izomorfism ce poartă numele de *antiautomorfismul canonic* al algebrei Clifford $C(Q)$.

Grupurile Pin şi Spin

În cele ce urmează, vom restrânge generalitatea considerând spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ dotat cu forma patratică standard

$$Q(x) = x_1^2 + ... + x_n^2, (\forall)x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Este de observat că forma polară a lui Q este produsul scalar standard $<,>$ pe $\mathbf{R}^n$. Vom nota Cl_n algebra Clifford corespunzătoare. Se introduce grupul multiplicativ Cl_n^* al elementelor inversabile din algebra Clifford Cl_n. De exemplu, oricare ar fi vectorul nenul $x \in \mathbf{R}^n$, rezultă $x \in C(Q)^*$ deoarece x admite elementul invers $x^{-1} = -\frac{1}{Q(x)}x$.

Construim reprezentarea $\rho : Cl_n^* \to GL(C(Q))$ a acestui grup. Prin definiţie luăm:

$$\rho(g)x = \alpha(g)xg^{-1}, (\forall)g \in Cl_n^*, x \in C(Q).$$

Considerăm acum *grupul Clifford* Ω, care este grupul elementelor din Cl_n ce invariază $\mathbf{R}^n$:

$$\Omega = \{g \in Cl_n^* \mid \rho(g)x \in \mathbf{R}^n, (\forall)x \in \mathbf{R}^n\}$$

şi γ restricţia reprezentării ρ la Ω. Se observă imediat că

$$\begin{gathered}\gamma(g)x = \alpha(g)xg^{-1} = gx(\alpha(g))^{-1}, \\ (\forall)g \in \Omega, x \in \mathbf{R}^n.\end{gathered} \tag{3.11}$$

În adevăr, dacă $g \in \Omega, x \in \mathbf{R}^n$, atunci $\gamma(g)x = \alpha(g)xg^{-1}$ din definiţia reprezentării γ. Mai mult, cum $\gamma(g)x \in \mathbf{R}^n$, deducem aplicând automorfismul canonic α ambilor membri ai acestei egalităţi:

$$-\gamma(g)x = g\alpha(x)\alpha(g^{-1}) = -gx(\alpha(g))^{-1}. \tag{3.12}$$

Propoziţia 7. Oricare ar fi vectorul $y \in \mathbf{R}^n$, rezultă că $y \in \Omega$ şi $\gamma(y) = s_y$, unde s_y este simetria definită de vectorul y.

Demonstraţie. Calculăm $\gamma(y)x, (\forall)\ x \in \mathbf{R}^n$. Cum $\alpha(x) = -x$, rezultă:

$$\gamma(y)x = -xyx^{-1} = \begin{cases} -x \textit{ dacă } y = x, \\ y \textit{ dacă } <x, y> = 0. \end{cases}$$

Deci $\gamma(y) = s_y$. $\square$

Fie $O(n)$ grupul ortogonal.

Propoziţia 8. $Im\gamma = O(n), \ker\gamma = K^*$.

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi că oricare ar fi $g \in \Omega$ avem $\gamma(g) \in O(n)$. Necesar şi suficient ca o aplicaţie liniară a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^n$ să fie ortogonală este ca ea să ducă orice bază ortogonală într-o bază ortogonală. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortogonală a lui $\mathbf{R}^n$ şi $f_i = \gamma(g)e_i, i \in \{1, ..., n\}$. Utilizând (3.11) şi (3.8) calculăm, $(\forall)$ $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$(\gamma(g)e_i)(\gamma(g)e_j) + (\gamma(g)e_j)(\gamma(g)e_i) =$$
$$\alpha(g)(e_ie_j + e_je_i)(\alpha(g))^{-1} = -2\delta_{ij}1 = -2 < \gamma(g)e_i, \gamma(g)e_j > 1 \text{ ,}$$

deci $< \gamma(g)e_i, \gamma(g)e_j >= \delta_{ij}, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}$. Ca urmare, $\gamma(g) \in O(n)$ deci $Im\gamma \subseteq O(n)$. Pentru a demonstra incluziunea opusă, fie $u \in O(n)$. Conform teoremei Cartan, transformarea ortogonală u este o compunere de cel mult n simetrii. Există vectorii $x_1, ..., x_h \in \mathbf{R}^n, h \leq n$, cu proprietatea $u = s_{x_1} \circ ... \circ s_{x_h}$. Fie elementul $g = x_1...x_h \in \Omega$. Conform Propoziţiei 7, $\gamma(g) = s_{x_1} \circ ... \circ s_{x_h}$, deci $Im\gamma = O(n)$.

Examinăm acum $\ker\gamma$. Un element $g \in \Omega$ este din $\ker\gamma$ dacă şi numai dacă $\gamma(g)x = x, (\forall)x \in \mathbf{R}^n$. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^n$ şi $\mathcal{B} = \{e_{i_1}, ...e_{i_s}\}_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n \\ s=0,1,...,n}}$ baza corespunzătoare din Cl_n. Elementul g se scrie:

$$g = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n \\ s=0,1,...,n}} g^{i_1...i_s}e_{i_1}, ...e_{i_s}.$$

Cum $g \in \ker\gamma$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$, rezultă $ge_i = e_ig$, adică:

$$\sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n \\ s=0,1,...,n}} (-)^s g^{i_1...i_s}e_{i_1}, ...e_{i_s}e_i = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n \\ s=0,1,...,n}} g^{i_1...i_s}e_ie_{i_1}, ...e_{i_s}. \quad (3.13)$$

Se constată imediat că $\{e_{i_1}, ...e_{i_s}e_i\}_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n \\ s=0,1,...,n}}$ este un sistem de elemente liniar independente din Cl_n, deci constitue o nouă bază a algebrei Clifford Cl_n. Pe de altă parte, $(\forall)1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, 1, ..., n\}$:

$$e_ie_{i_1}, ...e_{i_s} = \epsilon(i_1, ..., i_s; i)e_{i_1}, ...e_{i_s}e_i,$$

cu $\epsilon(i_1, ..., i_s; i) \in \{+1, -1\}$. Deci (3.13) implică $(\forall)1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, 1, ..., n\}$:

$$(-)^s g^{i_1...i_s}e_{i_1}, ...e_{i_s} = \epsilon(i_1, ..., i_s; i)g^{i_1...i_s}.$$

Fie acum un şir de indici $(i_1, ..., i_s), 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{1, ..., n\}$, arbitrar fixat. Alegând $i = i_k, k \in \{1, ..., s\}$, avem $\epsilon(i_1, ..., i_s; i) = (-1)^{s-1}$, deci $g^{i_1...i_s} = 0$. Deducem că $g = g_0 1$, deci $g \in K^*$. Acum este evident că avem $\ker\gamma = K^*$. □

Propoziţia 8 arată că grupul Clifford se poate considera ca fiind:

$$\Omega = \{x_1...x_h \mid x_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, ..., h, h \in \mathbf{N}\}.$$

Două subgrupuri de deosebit interes ale sale sunt:

$$\begin{aligned} Pin(n) &= \{g \in \Omega \mid g = x_1 ... x_h, x_i \in \mathbf{R}^n, Q(x_i) = 1, i = 1, ..., h\} \\ Spin(n) &= \{g \in Pin(n) \mid g = x_1 ... x_h, x_i \in \mathbf{R}^n, Q(x_i) = 1, h - par\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Se notează p restricţia reprezentării γ a grupului Clifford Ω la $Pin(n)$ respectiv la $Spin(n)$.

Este un simplu exerciţiu demonstrarea afirmaţiilor:

$$p(Pin(n)) = O(n), p(Spin(n)) = SO(n), \ker p = \mathbf{Z}_2.$$

Se demonstrează [30] că $Pin(n), Spin(n)$ sunt grupuri Lie.

De asemenea $Spin(n)$ este un *grup conex* pentru $n \geq 2$. În adevăr, deoarece $p : Spin(n) \to SO(n)$ este un morfism surjectiv de grupuri cu nucleul $\mathbf{Z}_2$, este suficient de demonstrat că există un drum cu elemente din $Spin(n)$ ce uneşte elementul neutru $1 \in Spin(n)$ cu opusul său, $(-1) \in Spin(n)$. Dacă $n \geq 2$, un astfel de drum poate fi $a : (-1, !) \to Spin(n)$:

$$a(t) = -\cos(\pi t) - \sin(\pi t) e_1 e_2.$$

Acest drum este în $Spin(n)$ deoarece:

$$a(t) = (\cos(\frac{\pi}{2} t) e_1 + \sin(\frac{\pi}{2} t) e_2)(\cos(\frac{\pi}{2} t) e_1 - \sin(\frac{\pi}{2} t) e_2).$$

Pentru $n \geq 3$, $Spin(n)$ este simplu conex iar reprezentarea $p : Spin(n) \to SO(n)$ este acoperirea universală a grupului $SO(n)$.

Algebra Lie a grupului $Spin(n)$ este:

$$spin(n) = Sp\{e_i e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

cu croşetul:

$$[x, y] = xy - yx, (\forall) x, y \in spin(n),$$

unde, ca de obicei, juxtapunerea denotă produsul din algebra Clifford Cl_n.

Reprezentări liniare

Fie V un spaţiu vectorial real şi $V^{\mathbf{C}}$ complexificatul său. Amintim că $V^{\mathbf{C}} = VXV$, adunarea vectorilor din $V^{\mathbf{C}}$ făcându-se pe componente, iar produsul dintre scalarul arbitrar $a + \mathbf{i}b \in \mathbf{C}$ şi vectorul arbitrar $(x, y) \in VXV$ fiind definit după formula:

$$(a + \mathbf{i}b)(x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Fie $B : VXV \to \mathbf{R}$ o formă biliniară, simetrică, şi $Q : V \to \mathbf{R}$ forma patratică asociată ei; definim complexificata sa $B' : V^{\mathbf{C}}XV^{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ prin formula:

$$B'((x,y),(u,v)) = B(x,u) - B(y,v) + \mathbf{i}[B(x,v) + B(y,u)]$$
$$(\forall)(x,y),(u,v) \in V^{\mathbf{C}}$$

Se deduce imediat expresia formei patratice $Q' : V^{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ asociate formei biliniare simetrice B'. Avem:

$$Q'(x,y) = Q(x) - Q(y) + 2\mathbf{i}B(x,y).$$

Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este bază ortogonală în raport cu Q a spaţiului vectorial real V, atunci $\{e'_1, ..., e'_n\}, e'_i = (e_i, 0), (\forall)i \in \{1, ..., n\}$ este bază ortogonală în raport cu Q' a spaţiului vectorial complex $V^{\mathbf{C}}$.

Dacă A este o algebră reală, atunci pe spaţiul vectorial $A^{\mathbf{C}}$, complexificatul spaţiului vectorial real A, se dă o structură de algebră (complexă) prin formula:

$$(x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu), (\forall)(x,y),(u,v) \in A^{\mathbf{C}} \qquad (3.15)$$

Consideraţiile de mai sus le vom aplica unei algebre Clifford reale.

Propoziţia 9. *Fie Q o forma patratică pe spaţiului vectorial real V şi $Q' : V^{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ complexificata sa. Are loc izomorfismul de algebre complexe $C(Q') \simeq (C(Q))^{\mathbf{C}}$.*

Demonstraţie. Din proprietatea de universalitate a algebrei Clifford $C(Q')$, avem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} & C(Q') & \\ i \nearrow & & \searrow h \\ V^{\mathbf{C}} & \xrightarrow{j} & C(Q)^{\mathbf{C}} \end{array}$$

unde i este incluziune, $j(x,y) = (x,y), (\forall)(x,y) \in V^{\mathbf{C}}$, iar $h : C(Q') \to C(Q)^{\mathbf{C}}$ este morfism de algebre; h există şi este unic deoarece din (3.15) deducem oricare ar fi $(x,y) \in V^{\mathbf{C}}$:

$$(j(x,y))^2 = (x^2 - y^2, xy + yx) = (Q(x) - Q(y), 2B(x,y)) = Q'(x,y)(1,0).$$

Rezultă imediat că morfismul de algebre h este izomorfism deoarece duce baze în baze şi $\dim C(Q') = \dim(C(Q))^{\mathbf{C}}$.□

Definiţie. Se numeşte *reprezentare liniară complexă a algebrei* reale sau complexe A o aplicaţie liniară $\rho : A \to M_n(\mathbf{C})$ ce comută cu produsul din algebra A. Reprezentarea ρ se numeşte ireductibilă dacă nu admite subspaţii vectoriale invariante diferite de $\{0\}$ şi $\mathbf{C}^n$.

Fie Cl_n algebra Clifford asociată formei patratice standard Q pe $\mathbf{R}^n$ iar Cl' algebra Clifford asociată formei patratice $(-Q)$. Are loc:

Propoziţia 10. *Avem izomorfismele de algebre:*

$$Cl_{n+2} \simeq Cl'_n \otimes_{\mathbf{R}} Cl_2, Cl_{n+2} \simeq Cl_n \otimes_{\mathbf{R}} Cl'_2,$$

produsul tensorial fiind cel uzual.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, ..., e_{n+2}\}$ o bază ortonormată din $\mathbf{R}^{n+2}$.

Primii n vectori din această bază generează Cl_n dar şi Cl'_n. Convenim să notăm $e_i = e'_i, i \in \{1, ..., n\}$, când considerăm $\{e_1, ..., e_n\}$ ca sistem de generatori pentru Cl'_n. Fie aplicaţia liniară: $u : \mathbf{R}^{n+2} \to Cl'_n \otimes Cl_2$, dată prin:

$$u(e_1) = 1 \otimes e_1, u(e_2) = 1 \otimes e_2, u(e_k) = e'_{k-2} \otimes e_1 e_2, (\forall) k \in \{3, ..., n+2\}.$$

Atunci în $Cl'_n \otimes Cl_2$ au loc egalităţile:

$$(u(e_i))^2 = -1,$$
$$u(e_i)u(e_j) + u(e_j)u(e_i) = 0, (\forall) i, j \in \{1, ..., n+2\}, i \neq j.$$

Ca urmare, $(u(x))^2 = -Q(x).1, (\forall) x \in \mathbf{R}^{n+2}$. Din proprietatea de universalitate a algebrei Clifford Cl_{n+2} rezultă că există un morfism unic de algebre $\widetilde{u} : Cl_{n+2} \to Cl'_n \otimes Cl_2$ ce face comutativă diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Cl_{n+2} \arrow[dr, "\widetilde{u}"] & \\ \mathbf{R}^{n+2} \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "u"] & & Cl'_n \otimes Cl_2 \end{tikzcd}$$

unde $\theta : \mathbf{R}^{n+2} \to Cl_{n+2}$ este aplicaţia de incluziune. Se arată imediat că morfismul de algebre $\widetilde{u} : Cl_{n+2} \to Cl'_2 \otimes Cl_2$ este izomorfism de algebre. Analog se demonstrează şi cel de al doilea izomorfism de algebre.□

Pentru cele ce urmează este de reţinut izomorfismul de algebre $\rho : Cl_2^{\mathbf{C}} \to M_2(\mathbf{C})$:

$$\rho(e_1) = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \rho(e_2) = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $\{e_1, e_2\}$ este baza canonică din $\mathbf{C}^2$. Folosind acest izomorfism, deducem:

Propoziţia 11. *Exista un izomorfism* $Cl_{n+2}^{\mathbf{C}} \simeq Cl_n^{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} M_2(\mathbf{C})$.

Demonstraţie. Utilizând Propoziţia 10 precum şi faptul că algebrele Clifford $Cl_n^{\mathbf{C}}$ şi $Cl_n'^{\mathbf{C}}$ sunt izomorfe, avem succesiv :

$$Cl_{n+2}^{\mathbf{C}} \simeq (Cl'_n \otimes_{\mathbf{R}} Cl_2)^{\mathbf{C}} \simeq Cl_n'^{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} Cl_2^{\mathbf{C}} \simeq$$
$$Cl_n^{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} Cl_2^{\mathbf{C}} \simeq Cl_n^{\mathbf{C}} \otimes M_2(\mathbf{C}).\square$$

Corolar. *Fie* $e_1, ..., e_{n+2}$ *elemente ce generează* $Cl_{n+2}^{\mathbf{C}}$. *Notăm cu* $e_1^*, ..., e_n^*$ *elementele ce generează algebra* $Cl_n^{\mathbf{C}}$. *Fie de asemenea:*

$$g_1 = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, g_2 = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

elementele ce genereaza algebra $M_2(\mathbf{C})$. *Izomorfismul* $Cl_{n+2}^{\mathbf{C}} \simeq Cl_n^{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} M_2(\mathbf{C})$ *este dat de aplicaţia:*

$$e_1 \to 1 \otimes g_1, e_2 \to 1 \otimes g_2, e_j \to ie_{j-2}^* \otimes g_1 g_2, (\forall) j \in \{1, ..., n\}.$$

Vom utiliza mai jos matricele din (3.16).

Aplicând în mod repetat concluzia din Propoziţiile 10, 11 şi ţinând cont şi de faptul că $Cl_1 \simeq \mathbf{C}$, deci $Cl_1^{\mathbf{C}} \simeq \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ deducem:

Propoziţia 12. *Au loc izomorfismele de algebre:*

$$Cl_n^{\mathbf{C}} \simeq \begin{cases} M_{2^m}(\mathbf{C}) \text{ dacă } n = 2m, \\ M_{2^m} \oplus M_{2^m} \text{ dacă } n = 2m+1. \end{cases}$$

Acest izomorfism este dat explicit prin formulele:

$$\text{Dacă } n = 2m:$$
$$e_j \to E \otimes ... \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes T \otimes ... \otimes T$$

unde T *apare de* $\frac{[j-1]}{2}$ *ori, iar*

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } j \text{ este impar} \\ 2 \text{ dacă } j \text{ este par.} \end{cases}$$

$$\text{Dacă } n = 2m+1:$$
$$e_j \to (E \otimes ... \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes T \otimes ... \otimes T,$$
$$E \otimes ... \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes T \otimes ... \otimes T), (\forall) j \in \{1, ..., 2m\}$$

unde T *apare de* $\frac{[j-1]}{2}$ *ori,*

$$e_{2m+1} \to (\mathbf{i}T \otimes ... \otimes T, -\mathbf{i}T \otimes ... \otimes T).$$

Ca urmare, avem morfismul de algebre:

$$Cl_n \overset{i}{\subset} Cl_n^{\mathbf{C}} \overset{\rho'}{\simeq} \begin{cases} M_{2^m}(\mathbf{C}) \text{ dacă } n = 2m \\ M_{2^m}(\mathbf{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbf{C}) \text{ dacă } n = 2m+1, \end{cases}$$

unde i *este incluziunea.*

Pentru $n = 2m$, algebra Clifford Cl_n admite deci reprezentarea complexă ireductibilă $\rho = \rho' \circ i$ pe spaţiul vectorial $\mathbf{C}^{2^m}$.

Fie aplicaţia:

$$i' : M_{2^m}(\mathbf{C}) \oplus M_{2^m}(\mathbf{C}) \to M_{2^{m+1}}(\mathbf{C}),$$
$$i'(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, (\forall) A, B \in M_{2^m}(\mathbf{C}).$$

Rezultă reprezentarea complexă ireductibilă $\rho = i' \circ \rho' \circ i$ a algebrei Clifford $Cl_n, n = 2m+1$, pe spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^{2^{m+1}}$.

Cl_n–module. Proprietăţi

Definiţie. Fie corpul $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$. Se numeşte *$Cl_n$–modul peste K* un spaţiu vectorial V peste corpul K cu proprietatea de a fi spaţiu de reprezentare pentru algebra Clifford Cl_n.

Urmare a definiţiei de mai sus, spaţiul vectorial V peste corpul K este Cl_n–modul peste K dacă şi numai dacă există $\rho : Cl_n \to Hom_K(V, V)$ o *K–reprezentare* a algebrei Clifford Cl_n, adică un $\mathbf{R}$-morfism de algebre. Aplicaţia ρ trebuie deci să asocieze fiecărui element $g \in Cl_n$ un endomorfism $\rho(g) : V \to V$ şi, mai mult, $(\forall) g_1, g_2, g \in Cl_n$ şi $r \in \mathbf{R}$:

$$\rho(g_1 + g_2) = \rho(g_1) + \rho(g_2); \rho(rg) = r\rho(g)$$
$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2).$$

De obicei, vom nota $\rho(g)v =^{not} g.v$ pentru orice $g \in Cl_n$, $v \in V$ şi "produsul" $g.v$ va fi denumit "*multiplicare Clifford*".

Definiţie. O *reprezentare spinorială reală* a grupului $Spin_n$ este un morfism de grupuri

$$\Delta : Spin_n \to GL(W)$$

care este restricţia unei *reprezentări ireductibile reale*

$$Cl_n \to Hom_{\mathbf{R}}(W, W)$$

la $Spin_n \subset Cl_n$.

Definiţie. O *reprezentare spinorială complexă* a grupului $Spin_n$ este un morfism de grupuri:

$$\Delta^{\mathbf{C}} : Spin_n \to GL_{\mathbf{C}}(W)$$

care este restiricţia unei *reprezentări ireductibile complexe*

$$Cl_n^{\mathbf{C}} \to Hom_{\mathbf{C}}(W, W)$$

la $Spin_n \subset Cl_n \subset Cl_n^{\mathbf{C}}$.

Multe dintre aplicaţiile algebrelor Clifford provin din utilizarea reprezentărilor lor. Cititorul interesat poate găsi în [18] aplicaţii interesante în domenii fundamentale ale geometriei diferenţiale cum ar fi teoria Hodge-de Rham, periodicitatea Bott, scufundări ale varietăţilor diferenţiabile în sfere, câmpuri de vectori tangenţi la sfere. Există un fenomen de periodicitate privind reprezentările algebrelor Clifford ce este legat de teoremele de periodicitate Bott prin izomorfismele Atiyah-Bott-Shapiro. Acest ultim aspect face parte din domeniul K-teoriei. Scopul nostru este de a pune în evidenţă cu prioritate aspecte ce vor fi utilizate în acest curs. Vom da totuşi unele rezultate ce ilustrează bogăţia de idei expusă şi nu necesită pregătiri substanţiale.

Are loc [18]:

Propoziţia 13. *Fie W un spaţiu vectorial peste corpul real* $\mathbf{R}$ *cu proprietatea de a fi* Cl_n-*modul. Atunci există pe W un produs scalar* $<,>$*cu proprietatea că oricare ar fi vectorul unitar* $e\in\mathbf{R}^n$,

$$< e.w, e.w' >=< w, w' >, (\forall) w, w' \in W. \tag{3.17}$$

Mai mult, dacă W este spaţiu vectorial complex, cu proprietatea de a fi $Cl-$ modul, atunci există pe W un produs scalar hermitian.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^n$. Atunci, $\mathcal{B} = \{e_{i_1}...e_{i_s}\}_{i_1<...<i_s}, s \in \{0, 1..., n\}$ este bază a algebrei Clifford Cl_n. Considerăm $(,)$ un produs scalar arbitrar pe W. Cu ajutorul lui, definim un nou produs scalar $<,>$ pe W . Oricare ar fi vectorii $w, w' \in W$, definim:

$$< w, w' >= \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n\\ s=0,1,...,n}} (e_{i_1}...e_{i_s}.w, e_{i_1}...e_{i_s}.w').$$

Rezultă imediat că

$$< e_i.w, e_i.w' >=< w, w' >, (\forall) i \in \{1, ..., n\} \tag{3.18}$$

deoarece $(\forall)$ $i \in \{1, ..., n\}$, elementele din mulţimea $\mathcal{B}$ coincid eventual până la semn cu cele din mulţimea $\mathcal{B}' = \{e_i e_{i_1}...e_{i_s}\}_{i_1<...<i_s}, s \in \{0, 1..., n\}$. Mai mult, oricare ar fi vectorul unitar $e \in \mathbf{R}^n$, avem $e = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{i=1}^n (a_i)^2 = 1$. Atunci utilizând (3.18) şi (3.9) avem:

$$\begin{aligned} < e.w, e.w >&= \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_i a_j < e_i.w, e_j.w >= \sum_{i=1}^n a_i^2 < e_i.w, e_i.w > + \\ &+ \textstyle\sum_{i<j} a_i a_j [< e_i.w, e_j.w > + < e_j.w, e_i.w >] = \\ &=< w, w > - \textstyle\sum_{i<j} a_i a_j < (e_j e_i + e_i e_j).w, w >=< w, w > . \end{aligned}$$

De aci deducem imediat (3.17).□

Propoziţia 13 afirmă, cu alte cuvinte, că pe orice Cl_n- modul W, unde W este spaţiu vectorial real, există un produs scalar $<,>$ cu proprietatea că multiplicarea Clifford cu vectori unitari din $\mathbf{R}^n$ este o transformare ortogonală a spaţiului vectorial W, în raport cu acest produs scalar.

Propoziţia 14. *Fie Cl_n- modulul W şi $<,>$ produsul scalar pe W cu proprietatea că oricare ar fi vectorul unitar* $e \in \mathbf{R}^n$ *se verifică (3.17). Atunci oricare ar fi vectorul* $v \in\mathbf{R}^n$:

$$< v.w, w' >= - < w, v.w' >, (\forall) w, w' \in W. \tag{3.19}$$

Demonstraţie. Fie $v \in W$ un vector nenul. Putem scrie atunci, aplicând Propoziţia 13:

$$< v.w, w' >=< \frac{1}{\|v\|} v.v.w, \frac{1}{\|v\|} v.w' >=$$
$$= \frac{1}{\|v\|^2} < -Q(v)w, v.w' >= - < w, v.w' >, (\forall) w, w' \in W \quad .\square$$

Aceste rezultate au consecinţe interesante cu legături subtile în domeniul topologiei varietăţilor diferenţiabile [18].

Are loc:

Propoziţia 15. *Dacă* $\mathbf{R}^{N+1}$ *este* Cl_n- *modul, atunci există* n *câmpuri vectoriale tangente liniar independente pe sfera* $S^N \subset \mathbf{R}^{N+1}$.

Demonstraţie. Din Propoziţia 13, dacă $\mathbf{R}^{N+1}$ este Cl_n- modul, atunci există pe $\mathbf{R}^{N+1}$ un produs scalar $<,>$ cu proprietatea că multiplicarea Clifford cu vectori unitari din $\mathbf{R}^n$ este o transformare ortogonală. Fie sfera

$$S^N = \{x \in \mathbf{R}^{N+1} \,|\, \| x \|^2 = 1\}.$$

Considerăm o bază ortonormată $\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbf{R}^n$. Cu ajutorul ei, construim pe $\mathbf{R}^{N+1}$ câmpurile vectoriale $V_j, j \in \{1, ..., n\}$, astfel:

$$V_j(x) = v_j.x, (\forall) x \in \mathbf{R}^{N+1}, (\forall) j \in \{1, ..., n\}.$$

Deoarece, conform Propoziţiei 14, aplicaţia liniară $x \to v_j.x, (\forall) j \in \{1, ..., n\}$ este antisimetrică, avem:

$$< V_j(x), x >= 0, (\forall) j \in \{1, ..., n\}, (\forall) x \in \mathbf{R}^{N+1}.$$

Ca urmare, câmpurile vectoriale $V_j, j \in \{1, ..., n\}$ sunt tangente sferei S^N. Rămâne de demonstrat că aceste câmpuri vectoriale sunt liniar independente. Fie x arbitrar fixat pe sfera S^N şi combinaţia liniară nulă:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j V_j(x) = 0, \lambda_j \in \mathbf{R}, (\forall) j \in \{1, ..., n\}.$$

Din proprietăţile multiplicării Clifford, deducem:

$$(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j).x = 0.$$

Fie $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$. Atunci, ultima egalitate ne dă succesiv, deoarece $x \in S^N$:

$$v.v.x = 0 \iff v^2.x = 0 \iff Q(v)x = 0$$
$$\iff Q(v) = 0 \iff v = 0 \iff \lambda_j = 0, (\forall) j.\square$$

Se pune problema: dacă N este un număr natural dat, care este cel mai mare întreg natural n cu proprietatea ca spaţiul vectorial $\mathbf{R}^{N+1}$ să fie Cl_n- modul? Conform Propoziţiei 15, putem reformula problema:

dacă N este un număr natural dat, care este cel mai mare număr n de câmpuri vectoriale, liniar indepenedente, tangente la sfera S^N. Matematicianul englez J. F. Adams a demonstrat în 1962 [2] că scriind:

$$N+1 = 2^{4a+b}(2t+1), 0 \leq b \leq 3, a, b \in \mathbf{N},$$

rezultă:

$$n = 8a + 2^b - 1.$$

Rezultatele rămân valabile înlocuind sfera S^N cu spaţiul proiectiv real $N-$ dimensional $P^N(\mathbf{R})$, deoarece $P^N(\mathbf{R}) = S^N/\mathbf{Z}_2$.

O frumoasă expunere a problemei şi modului de construcţie a acestor câmpuri vectoriale pe sferele $S^N, N \in \{4m-1, 8m-1 \mid m \in \mathbf{N}^*\}$ se poate vedea în [31], în capitolul al treilea, scris de Th. Hangan.

Este de observat că pe sfera S^N, cu N *par*, nu există câmpuri vectoriale tangente liniar independente şi, în consecinţă, $\mathbf{R}^m, m$ – *impar nu poate fi* Cl_n – *modul*.

Exerciţii.

1) Fie spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ cu o orientare dată. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază pozitiv orientată a lui $\mathbf{R}^n$, ortonormată în raport cu forma canonica standard a lui $\mathbf{R}^n$. Se defineşte "*elementul de volum*", notat ω, prin: $\omega = e_1 ... e_n$.

a) Arătaţi că definiţia elementului de volum ω nu depinde de baza pozitiv orientată considerată.

b) $\omega^2 = (-1)^N, N = \frac{n(n+1)}{2}$ şi $v\omega = (-1)^{n-1}\omega v, (\forall) v \in \mathbf{R}^n$.

2) Dacă n este impar, atunci ω este element central al algebrei Clifford Cl_n iar dacă n este par, atunci

$$\varphi\omega = \omega\alpha(\varphi), (\forall)\varphi \in Cl_n$$

unde $\alpha : Cl_n \to Cl_n$ automorfismul canonic al algebrei Clifford Cl_n. (vezi exerciţiul 1)

3) Avem izomorfismul de algebre $Cl_n \simeq Cl_{n+1}^0$ unde Cl_{n+1}^0 este subalgebra algebrei Clifford Cl_{n+1} generată de produse de elemente, în număr par, din spaţiul vectorial $\mathbf{R}^{n+1}$.

Rezolvare. Fie $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}\}$ o bază ortonormată a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^{n+1}$. Atunci avem $\mathbf{R}^n \simeq Sp\{e_1, ..., e_n\}$. Considerăm aplicaţia $f : \mathbf{R}^n \to Cl_{n+1}^0, f(e_i) = e_{n+1}e_i, i \in \{1, ..., n\}$. Extinzând această definiţie prin liniaritate, deducem pentru orice $x \in \mathbf{R}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, următorul şir de egalităţi succesive:

$$f(x)^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j e_{n+1} e_i e_{n+1} e_j = \\ \sum_{i,j=1}^n x_i x_j e_i e_j = x^2 = -Q(x).1,$$

unde $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este forma patratică standard pe $\mathbf{R}^n$.

Din proprietatea de universalitate a algebrei Clifford Cl_n, rezultă că există $\tilde{f} : Cl_n \to Cl^0_{n+1}$ un morfism unic de algebre care închide diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & Cl_n & \\ \theta \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\ \mathbf{R}^n & \underset{f}{\rightarrow} & Cl^0_{n+1} \end{array}$$

Fie acum $\{e_{i_1}...e_{i_s}\}_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n\\ s=0,1,...,n}}$ baza algebrei Clifford Cl_n. Urmează, oricare ar fi multi-indicele $(i_1, ..., i_s)$:

$$\tilde{f}(e_{i_1}...e_{i_s}) = \tilde{f}(e_{i_1})...\tilde{f}(e_{i_s}) =$$
$$(e_{n+1}e_{i_1})...(e_{n+1}e_{i_s}) = (-1)^{s(s-1)/2}(e_{n+1})^s e_{i_1}...e_{i_s}.$$

Deci morfismul de algebre $\tilde{f} : Cl_n \to Cl^0_{n+1}$ duce un sistem de vectori liniar independent intr-un sistem de vectori liniar independent şi deci $\tilde{f}$ este injectivă. În plus, $\dim Cl_n = \dim Cl^0_{n+1}$, de unde se deduce că $\tilde{f}$ este surjectivă. Concluzia este că $\tilde{f} : Cl_n \to Cl^0_{n+1}$ este un izomorfism de algebre.

4) Să se arate că algebra $\mathbf{H}$ a quaternionilor admite o reprezentare complexă prin matrice din $M_2(\mathbf{C})$. *Indicaţie.* Fie $\{e_1, e_2\}$ baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^2$. Se ştie că avem izomorfismul de algebre $\mathbf{H} \simeq Cl_2$. O bază a algebrei Cl_2 este $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ iar o reprezentare a sa prin matrice complexe de ordin 2 se obţine considerând aplicaţia $\rho : Cl_2 \to M_2(\mathbf{C})$,

$$\rho(e_1) = \mathbf{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Arătaţi că avem izomorfismul de grupuri $Spin(3) \simeq SU(2)$. *Indicaţie.* Din exerciţiul precedent, algebra Clifford Cl_2 este izomorfă cu algebra de matrice:

$$\rho(Cl_2) = \{\lambda_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1\mathbf{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\mathbf{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \tag{3.20}$$

unde $\lambda_k \in \mathbf{R}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pe de altă parte:

$$SU(2) = \{A \in M_2(\mathbf{C}) \mid A^*A = I_2, \det A = 1\} =$$
$$= \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid\mid a \mid^2 + \mid b \mid^2 = 1\},$$

unde A^* denotă adjuncta matricei A. Din (3.20), deducem $SU(2) \subset \rho(Cl_2)$. Fie $\sigma : SU(2) \to Gl(\mathbf{R}^3)$, aplicaţia dată prin:

$$\sigma(A)(X) = AXA^{-1}, (\forall)X \in \mathbf{R}^3, A \in SU(2),$$

unde vectorul $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ se scrie ca matrice, utilizând (3.20), deoarece $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{H}$, sub forma:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{i}x_1 & x_2 + \mathbf{i}x_3 \\ -x_2 + \mathbf{i}x_3 & -\mathbf{i}x_1 \end{pmatrix} \in \rho(Cl_2). \tag{3.21}$$

Notând

$$\sigma(X) = X', X' = (x'_1, x'_2, x'_3),$$

avem în reprezentarea matriceală:

$$\sigma \begin{pmatrix} \mathbf{i}x_1 & x_2 + \mathbf{i}x_3 \\ -x_2 + \mathbf{i}x_3 & -\mathbf{i}x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}x'_1 & x'_2 + \mathbf{i}x'_3 \\ -x'_2 + \mathbf{i}x'_3 & -\mathbf{i}x'_1 \end{pmatrix}.$$

Fie $A \in SU(2), A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Prin calcul, se constată că:

$$\begin{cases} x'_1 = (\mid a \mid^2 - \mid b \mid^2)x_1 + 2(Ima\bar{b})x_2 + 2Re(a\bar{b})x_3 \\ x'_2 = 2(Imab)x_1 + Re(a^2 + b^2)x_2 - Im(a^2 - b^2)x_3 \\ x'_3 = -2(Reab)x_1 + Im(a^2 + b^2)x_2 + Re(a^2 - b^2)x_3 \end{cases}$$

de unde, $Im\sigma \subseteq SO(3)$. Rezultă $Im\sigma = SO(3)$ şi $\ker \sigma = \mathbf{Z}_2$.

Pe de altă parte, există reprezentarea $p : Spin(3) \to SO(3)$ cu $\ker p = \mathbf{Z}_2$. Definim aplicaţia $\varphi : Spin(3) \to SU(2)$ astfel: oricare ar fi elementul $g = x^1 ... x^h \in Spin(3), x^i \in \mathbf{R}^3, \| x^i \|^2 = 1, i \in \{1, ..., h\}$, definim:

$$\varphi(g) = X^1 ... X^h,$$

unde am notat cu X^i matricea ce corespunde vectorului $x^i \in \mathbf{R}^3$ prin reprezentarea (3.21). Rezultă că φ este un morfism de grupuri şi $\sigma \circ \varphi = p$.

Un alt mod de rezolvare este următorul. Fie $\mathbf{H}^1$ grupul multiplicativ al quaternionilor de normă 1. Se consideră bijecţia $S^3 \to \mathbf{H}^1$,

$$(x_1, ..., x_4) \in S^3 \to q = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} \in \mathbf{H}^1$$

unde S^3 este sfera unitate din $\mathbf{R}^4$, iar $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este baza canonică a algebrei $\mathbf{H}$ a quaternionilor. Această bijecţie conferă sferei S^3 o structură de grup multiplicativ izomorf cu grupul $SU(2)$. Avem următoarele izomorfisme de grupuri:

$$Spin(3) \simeq S^3 \simeq SU(2).$$

4

Fibrări

Fibrări principale

Vom aminti unele elemente din teoria fibrărilor [17] ce sunt indispensabile pentru buna înţelegere a noţiunilor de structură spinorială, conexiune spinorială, operator Dirac, fibrare Clifford, fibrare Dirac etc.

Definiţie. Fie M, P varietăţi diferenţiabile reale şi G un grup Lie. Spunem că $P =^{not} P(M, G)$ este *fibrare principală de bază* M şi de *grup structural* G dacă şi numai dacă se verifică următoarele proprietăţi:

i) grupul Lie G acţionează diferenţiabil, liber, la dreapta pe varietatea P;

ii) mulţimea orbitelor lui P, modulo acţiunea lui G pe P, coincide cu varietatea diferenţiabilă M;

iii) surjecţia canonică $\pi : P \to M$ este aplicaţie diferenţiabilă;

iv) are loc proprietatea de *trivializare locală* care afirmă că oricare ar fi punctul $x \in M$ există U o vecinătate deschisă a lui x şi $s : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ un difeomorfism cu proprietatea:

$$s(u) = (\pi(u), t(u)), t(ua) = t(u)a, (\forall)u \in \pi^{-1}(U), a \in G,$$

unde am notat prin $(u, a) \to ua, (\forall)u \in P, a \in G$ acţiunea la dreapta a grupului Lie G pe varietatea diferenţiabilă P.

Difeomorfismul $s : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ poartă numele de *difeomorfism de trivializare locală*. Varietatea diferenţiabilă P se numeşte *spaţiul total* al fibrării principale $P(M, G)$. Oricare ar fi punctul $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$

se numeşte *fibra deasupra lui* x. Observăm că dacă $u \in \pi^{-1}(x)$, atunci $\pi^{-1}(x) = \{ua \mid a \in G\}$. Dacă $u \in \pi^{-1}(x), x \in M$, vom mai spune că $\pi^{-1}(x)$ este *fibra prin* u. Să remarcăm că fibra $\pi^{-1}(x)$ este subvarietate a lui P, oricare ar fi $x \in M$. Atunci, oricare ar fi $u \in \pi^{-1}(x)$, se poate considera spaţiul tangent la $\pi^{-1}(x)$ în u, numit *spaţiul vertical* în $u \in P$ şi notat V_u. Evident, $V_u \subset T_uP$, oricare ar fi $u \in P$.

Dacă $P = P(M, G)$ este o fibrare principală, vom nota de obicei acţiunea lui G pe P prin juxtapunere, ca mai sus.

Fibrarea trivială este cel mai simplu exemplu de fibrare principală. Ea se obţine considerând $P = M \times G$, unde M este o varietate diferenţiabilă, G este un grup Lie, iar acţiunea lui G pe varietatea produs $P = M \times G$ se defineşte prin $((x,a),b) \to (x,ab), (\forall)x \in M, a, b \in G$.

Fibrarea reperelor liniare este un exemplu deosebit de util pentru a înţelege această noţiune.

Fie M varietate diferenţiabilă reală, $n-$ dimensională.

Considerăm $P = \{(x,X) \mid x \in M, X - \textit{reper din } T_xM\}$. Grupul general liniar $Gl(n;\mathbf{R})$ acţionează liber, la dreapta, pe P prin aplicaţia $((x,X),a) \to (x,Y)$, unde Y este reper din T_xM cu proprietatea că matricea a este chiar matricea de trecere de la reperul X la reperul Y. Se obţine astfel *fibrarea reperelor liniare a lui* M, ce se notează $L(M)$ [30]. Analog, dacă M este varietate Riemann, cu metrica g, considerând P mulţimea perechilor (x,X) cu x punct din M iar $X-$ reper ortonormat în raport cu g_x din T_xM, se defineşte o acţiune a grupului ortogonal $O(n)$ pe P. Se construeşte, astfel, *fibrarea reperelor ortogonale* (sau ortonormate) a lui M. Continuând cu particularizarea varietăţii diferenţiabile M, fie M varietate Riemann orientabilă, cu o orientare dată, $P-$ mulţimea perechilor $(x,X), x \in M, X$ fiind reper ortonormat, pozitiv orientat din T_xM. Rezultă o acţiune naturală a grupului special ortogonal $SO(n)$ pe P. Se obţine astfel *fibrarea reperelor special ortogonale* $SO(M)$.

În teoria fibrărilor principale se introduc funcţiile de tranziţie corespunzătoare unei acoperiri de trivializare locală, funcţii ce joacă, pentru această structură, un rol asemănător cu cel pe care îl au funcţiile de schimbare de coordonate corespunzătoare unui atlas al unei varietăţi date.

Fie $P = P(M,G)$ o fibrare principală şi cu proiecţia $\pi : P \to M$ iar $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o *acoperire de trivializare locală*. Aceasta înseamnă că $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este o acoperire deschisă a varietăţii diferenţiabile M cu proprietatea că oricare ar fi indicele $\alpha \in A$ există $s_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha XG$ un difeomorfism de trivializare locală (vezi proprietatea *iv*) din definiţia fibrărilor principale). Pentru a fixa notaţia, să scriem:

$$s_\alpha(u) = (\pi(u), t_\alpha(u)), (\forall)\alpha \in A, u \in \pi^{-1}(U_\alpha). \tag{4.1}$$

Se ştie din proprietatea *iv*) din definiţia fibrărilor principale că aplicaţia

$s_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha X G$ fiind difeomorfism de trivializare locală avem:

$$t_\alpha(ua) = t_\alpha(u)a, (\forall)\alpha \in A, u \in \pi^{-1}(U_\alpha), a \in G. \tag{4.2}$$

Oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$, se consideră aplicaţia diferenţiabilă $s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, dată prin formula:

$$s_{\alpha\beta}(x) = t_\alpha(u)(t_\beta(u))^{-1}, (\forall)x \in U_\alpha \cap U_\beta, u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta). \tag{4.3}$$

Definiţia dată nu depinde de algerea punctului $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, având în vedere proprietatea (4.2).

Mulţimea $\{s_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ se numeşte *familia funcţiilor de tranziţie ale lui P corespunzătoare acoperirii de trivializare locală* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

În particular, considerăm fibrarea reperelor liniare $L(M)$ a varietăţii diferenţiabile n - dimensionale M şi fie $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas pe M. Oricare ar fi $u = (x, X) \in L(M)$, dacă $x \in U_\alpha$, să notăm $a \in GL(n; \mathbf{R})$ matricea de trecere de la $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(x), ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(x)\}$, reperul canonic în raport cu harta (U_α, h_α), al spaţiului tangent $T_x M$, la reperul X. Analog, dacă $x \in U_\beta$, fie $b \in GL(n; \mathbf{R})$ matricea de trecere de la $\{\frac{\partial}{\partial x'^1}(x), ..., \frac{\partial}{\partial x'^n}(x)\}$, reperul canonic în raport cu harta (U_β, h_β), al spaţiului tangent $T_x M$, la reperul X. Avem atunci:

$$s_\alpha(u) = (x, a), s_\beta(u) = (x, b),$$

de unde, din (4.3), deducem că oricare ar fi $\alpha, \beta \in A$, aplicaţia $s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n; \mathbf{R})$ este dată prin:

$$s_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}(x) \right)_{i,j}, (\forall)x \in U_\alpha \cap U_\beta, \alpha, \beta \in A. \tag{4.4}$$

Deci, oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$ şi punctul $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, am arătat că matricea $s_{\alpha\beta}(x)$ este valoarea în x a matricei jacobiane a transformării de coordonate $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ când se trece de la coordonatele $(x'^1, ..., x'^n)$ în raport cu harta (U_β, h_β) la coordonatele $(x^1, ..., x^n)$ în raport cu harta (U_α, h_α).

În general, pentru orice punct $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, $(\forall)\alpha, \beta, \gamma \in A$, se arată imediat că:

$$s_{\alpha\beta}(x) s_{\beta\gamma}(x) = s_{\alpha\gamma}(x). \tag{4.5}$$

Reciproc, are loc:

Teorema 1. *Fie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o acoperire cu mulţimi deschise a varietăţii diferenţiabile reale M, G un grup Lie şi $\{s_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ o familie de aplicaţii diferenţiabile,*

$$s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G, (\forall)\alpha, \beta \in A, U_\alpha \cap U_\beta \neq \Phi.$$

Presupunem că oricare ar fi indicii $\alpha, \beta, \gamma \in A$ încât $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \Phi$, au loc relațiile (4.5).

Atunci, există o fibrare principală $P = P(M, G)$ pentru care $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o acoperire de trivializare locală având ca funcții de tranziție corespunzătoare $\{s_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$.

Demonstrație. Din relațiile (4.5) rezultă imediat că oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$ și $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ are loc egalitatea: $(s_{\alpha\beta}(x))^{-1} = s_{\beta\alpha}(x)$, deoarece $s_{\alpha\alpha}(x) = e$, unde $e \in G$ este elementul neutru. Fie mulțimea $X = \{(\alpha, x, a) \mid \alpha \in A, x \in U_\alpha, a \in G\}$, pe care introducem o relație de echivalență. Oricare ar fi elementele $(\alpha, x, a), (\beta, y, b) \in X$ vom spune că sunt echivalente și vom scrie:

$$(\alpha, x, a) \sim (\beta, y, b) \Longleftrightarrow x = y \in U_\alpha \cap U_\beta, b = s_{\beta\alpha}(x)a.$$

Utilizând relațiile (4.5) rezultă că " $\sim$ " este o relație de echivalență pe mulțimea X. Vom nota $\rho(\alpha, x, a)$ clasa de echivalență modulo relația de echivalență " $\sim$ ", oricare ar fi elementul $(\alpha, x, a) \in X$. Fie $P = X/\sim$ mulțimea claselor de echivalență astfel obținute. Urmărim sa dotăm mulțimea P cu o structură de varietate diferențiabilă și să definim pe ea o acțiune diferențiabilă a grupului Lie G încât mulțimea orbitelor sale să coincidă cu varietatea diferențiabilă dată M.

Fie aplicația $P \times G \to P$, dată de

$$\rho(\alpha, x, a)c = \rho(\alpha, x, ac), (\forall)\rho(\alpha, x, a) \in P, c \in G.$$

Definiția acestei aplicații este corectă, nedepinzând de reprezentantul ales din clasa $\rho(\alpha, x, a) \in P$. Fie de asemenea aplicaţa $\pi : P \to M, \pi(\rho(\alpha, x, a)) = x$. Oricare ar fi $u, v \in P$, vom arăta că $\pi(u) = \pi(v)$ dacă și numai dacă există $c \in G$ cu proprietatea $v = uc$. Aceasta este o condiție necesară și suficientă ca M să fie spațiul orbitelor acțiunii lui G ce am definit-o pe P. Fie $u = \rho(\alpha, x, a), v = \rho(\beta, y, b)$ cu proprietatea că $\pi(u) = \pi(v) = x$. Deci $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$; avem de asemenea $v = \rho(\beta, y, b) = \rho(\alpha, x, s_{\alpha\beta}(x)b)$. Există $c \in G$ cu proprietatea $v = uc$, adică $\rho(\alpha, x, s_{\alpha\beta}(x)b) = \rho(\alpha, x, ac)$, deoarece aceasta revine la $ac = s_{\alpha\beta}(x)b$ sau $c = a^{-1}s_{\alpha\beta}(x)b$. Reciproc, dacă există $c \in G$ cu proprietatea că $v = uc$, deducem $\rho(\beta, y, b) = \rho(\alpha, x, ac)$, de unde $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$, deci $\pi(u) = \pi(v) = x$.

Structura de varietate diferențiabilă a mulțimii P se obține datorită bijecțiilor ce le definim mai jos. Oricare ar fi indicele $\alpha \in A$, fie $s_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, aplicația definită prin:

$$s_\alpha(\rho(\alpha, x, a)) = (x, a), (\forall)u = \rho(\alpha, x, a) \in \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Avem

$$s_\alpha \circ s_\beta^{-1}(y, b) = (y, s_{\alpha\beta}(y)b), (\forall)(y, b) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G.$$

Deci

$$s_\alpha \circ s_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$$

este un difeomorfism oricare ar fi $\alpha, \beta \in A$. Atunci mulţimea P va avea o structură de varietate diferenţiabilă via structura diferenţiabilă a lui M respectiv G, încât aplicaţiile s_α, π precum şi acţiunea grupului Lie G pe P devin diferenţiabile.

Mai mult, P devine spaţiul total al unei fribrări principale de bază M, de grup structural G, cu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, o acoperire de trivializare locală cu familia funcţiilor de tranziţie corespunzătoare exact $\{s_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$.□

Definiţie. Fie $P = P(M, G), P' = P'(M', G')$ două fibrări principale şi $h : G \to G', f : P \to P', g : M \to M'$ un morfism de grupuri Lie şi respectiv, două aplicaţii diferenţiabile cu proprietăţile:

i) $\pi : P \to M, \pi' : P' \to M'$ fiind proiecţiile, atunci diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow[g]{} & M' \end{array}$$

este comutativă;

ii) oricare ar fi $u \in P, a \in G$, este îndeplinită egalitatea:

$$f(ua) = f(u)h(a).$$

În aceste condiţii, vom spune că f este *morfism de fibrări principale* ce se proiectează pe g şi corespunde morfismului h de grupuri.

Proprietatea *ii)* afirmă că f duce fibră în fibră.

Dacă, în plus, $f : P \to P', g : M \to M'$ sunt difeomorfisme iar $h : G \to G'$ este izomorfism de grupuri Lie, vom spune că $f : P \to P'$ este izomorfism de fibrări principale. Două fibrări principale se vor numi izomorfe dacă şi numai dacă există un izomorfism între ele.

Două fibrări principale $P = P(M, G), P' = P'(M, G)$ peste aceeaşi bază M, cu acelaşi grup structural G, ce posedă o acoperire de trivializare locală comună şi aceleaşi funcţii de tranziţie corespunzătoare acestei acoperiri, sunt izomorfe.

Vom descrie mai jos un izomorfism al lor. Fie $\pi : P \to M$, respectiv $\pi' : P' \to M$, proiecţiile celor două fibrări. Considerăm acoperirea de trivializare locală comună $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ şi, oricare ar fi $\alpha \in A$, notăm cu $s_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, respectiv $s'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ difeomorfismul corespunzător de trivializare locală.

Pentru orice $\alpha \in A$, se consideră *secţiunea canonică:*

$$z_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha), z_\alpha(x) = s_\alpha^{-1}(x, e), (\forall) x \in U_\alpha. \tag{4.6}$$

Oricare ar fi punctul $x \in U_\alpha \cap U_\beta, \alpha, \beta \in A$, avem:

$$z_\beta(x) = z_\alpha(x) s_{\alpha\beta}(x). \tag{4.7}$$

Analog, pentru fibrarea principală $P' = P'(M, G)$, avem, oricare ar fi $\alpha \in A$, secţiunea canonică:

$$z'_\alpha : U_\alpha \to \pi'^{-1}(U_\alpha), z'_\alpha(x) = s'^{-1}_\alpha(x, e), (\forall) x \in U_\alpha$$

şi vom avea relaţii analoage cu (4.7).

Fie $f : P \to P'$ aplicaţia definită astfel: oricare ar fi $u \in P, \pi(u) = x$ există cel puţin un indice $\alpha \in A$ încât $x \in U_\alpha$. Punctele u şi $z_\alpha(x)$ aparţinând aceleeaşi fibre deasupra lui x din fibrarea $P = P(M, G)$, rezultă că există $a \in G$ cu proprietatea că $u = z_\alpha(x)a$; definim

$$f(u) = z'_\alpha(x)a.$$

Se arată că definiţia lui f este corectă (în sensul că nu depinde de indicele α, deoarece avem formulele (4.7)) şi $f : P \to P'$ este izomorfism de fibrări principale ce se proiectează pe aplicaţia identică a varietăţii M şi corespunde izomorfismului identic al grupului Lie G.

Ca urmare, fibrarea $P = P(M, G)$ din teorema 1 este unică până la un izomorfism de fibrări principale. Cu alte cuvinte, funcţiile de tranziţie corespunzătoare unei acoperiri de trivializare locală determină o fibrare principală până la un izomorfism de fibrări principale.

Conexiuni pe fibrări principale

Amintim acum următorul rezultat important din teoria grupurilor Lie:

Propoziţia 2. *Fie G un grup Lie şi g algebra sa Lie. Există o 1-formă unică τ pe G, cu valori în g încât să se verifice următoarele proprietăţi:*

1. *$\tau(X_e) = X_e, (\forall) X \in \mathcal{X}(G)$, unde e este elementul neutru al grupului Lie G;*

2. *τ este invariantă la translaţii stângi, adică, oricare ar fi $a \in G$ notând cu $L_a : G \to G$ aplicaţia dată de $L_a(b) = ab, (\forall) b \in G$, numită translaţie la stânga, avem:*

$$\tau(L^*_a X_b) = \tau(X_b), (\forall) X \in X(M), b \in G.$$

Forma Pfaff τ astfel obţinută se numeşte $1-$ *forma canonică a grupului Lie G.*

Dacă, de exemplu, $G = Gl(n; \mathbf{R})$ atunci $g = M_n(\mathbf{R})$, iar forma fundamentală τ este forma Pfaff dată de:

$$\tau(X_a) = aX_a, (\forall)a \in Gl(n;\mathbf{R}), X \in \mathcal{X}(Gl(n;\mathbf{R})). \tag{4.8}$$

În cele ce urmează G va fi un grup Lie, iar g algebra sa Lie.

Fie $P = P(M, G)$ o fibrare principală. Oricărui element $A \in g$ i se asociază un câmp de vectori $A^* \in \mathcal{X}(P)$, numit *câmp de vectori fundamental corespunzător elementului* $A \in g$, astfel: $A^*_u = R^*_u A, (\forall)u \in P$, unde $R_u : G \to P$ este aplicaţia diferenţiabilă indusă de acţiunea la dreapta $(u, a) \in PXG \to ua \in P$ a lui G pe P. Deci, pentru orice element fixat $u \in P$, avem $R_u(a) = ua, (\forall)a \in G$.

Acţiunea lui G pe P induce de asemenea, pentru orice element $a \in G$ aplicaţia diferenţiabilă $R'_a : P \to P$ dată prin $R'_a(u) = ua$.

Avem o nouă caracterizare a spaţiului vertical în $u, (\forall)$ $u \in P$, şi anume:

$$V_u = \{A^*_u \mid A \in g\}. \tag{4.9}$$

Această caracterizare implică proprietatea aplicaţiei $u \in P \to V_u \subset T_u P$ de a fi o distribuţie diferenţiabilă pe varietatea P, de dimensiune egală cu $\dim G$. Ea se numeşte *distribuţia verticală* a lui P. În general, nu există o distribuţie diferenţiabilă pe P, unică, complementară celei verticale. Importanţa noţiunii de conexiune pe o fibrare principală este aceea că o astfel de conexiune realizează o alegere a unei distribuţii diferenţiabile a lui P, care este complementară distribuţiei verticale. Prezentăm în continuare această noţiune.

Definiţie. Fie $P = P(M, G)$ o fibrare principală. O *conexiune* Γ pe P este o distribuţie diferenţiabilă ce asociază oricărui punct $u \in P$ un subspaţiu vectorial $Q_u \subset T_u P$ cu proprietăţile următoare:

$$\begin{gathered} 1)\ T_u P = Q_u \oplus V_u; \\ 2)\ (\forall)a \in G, Q_{ua} = R'^*_a Q_u; \\ 3)\ Q_u \textit{ depinde diferenţiabil de } u. \end{gathered}$$

Subspaţiul vectorial Q_u se numeşte *spaţiul orizontal* în u.

Dacă Γ este o conexiune pe fibrarea principală $P = P(M, G)$, atunci se poate construi o formă Pfaff ω pe P, cu valori în g, algebra Lie a grupului Lie G, ca mai jos. Orice element $X \in \mathcal{X}(P)$ se descompune în mod unic, urmare a proprietăţii 1) din definiţia conexiunii, sub forma:

$$X = hX + vX, (hX)_u \in Q_u, (vX)_u \in V_u, (\forall)u \in P.$$

Definim $\omega(X) = A$ unde $A^* = vX$ (evident, oricare ar fi $u \in P$, spaţiile vectoriale g şi V_u sunt izomorfe, un izomorfism al lor fiind $A \in g \to A^*_u \in V_u$ unde, amintim că A^* este câmpul de vectori fundamental corespunzător elementului $A \in g$). Forma Pfaff ω se numeşte *forma de conexiune a conexiunii* Γ.

Se arată:

Propoziţia 3. *Forma de conexiune ω a unei conexiuni Γ are următoarele proprietăţi:*

1) $\omega(A^*) = A, (\forall)A \in g$;

2) $R_a^*\omega = (ada^{-1})\omega, (\forall)a \in G$,

unde $R_a : G \to G, R_a(b) = ba, (\forall)a, b \in G$. *Reciproc, dacă există o* $1-$ *formă* ω *pe* P, *cu valori în* g, *având proprietăţile 1),2) de mai sus, atunci există o conexiune* Γ *pe* P *a cărei formă de conexiune este* ω.

Pentru a exprima local o conexiune Γ pe fibrarea principală $P = P(M, G)$, se consideră o acoperire de trivializare locală $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, cu difeomorfismelele de trivializare locală

$$s_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G, (\forall)\alpha \in A.$$

Pentru orice $\alpha \in A$, se consideră secţiunea canonică

$$z_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha), z_\alpha(x) = s_\alpha^{-1}(x, e), (\forall)x \in U_\alpha.$$

Oricare ar fi punctul $x \in U_\alpha \cap U_\beta, \alpha, \beta \in A$, avem relaţia (4.7).

Notând ca de obicei cu τ forma canonică a grupului Lie G, se defineşte pe $U_\alpha \cap U_\beta$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in A$ încât $U_\alpha \cap U_\beta \neq \Phi$, forma Pfaff $g-$ valuată $\tau_{\alpha\beta}$ prin condiţia:

$$\tau_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta *}\tau, \tag{4.10}$$

unde $\{s_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ este familia funcţiilor de tranziţie corespunzătoare acoperirii $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Are loc:

Teorema 4. *Fie* ω *forma de conexiune a unei conexiuni* Γ *pe fibrarea principală* $P = P(M, G)$ *şi* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *o acoperire de trivializare locală a fibrării date. Considerăm pentru fiecare indice* $\alpha \in A$ *secţiunea canonică corespunzătoare (4.6) şi forma Pfaff* ω_α *pe* U_α, *cu valori în* g, *definită prin* $\omega_\alpha = z_{\alpha *}\omega$. *Atunci oricare ar fi* $x \in U_\alpha \cap U_\beta, X \in T_xM$, *are loc formula:*

$$\omega_\beta(X) = ad(s_{\alpha\beta}(x))^{-1}\omega_\alpha(X) + \tau_{\alpha\beta}(X). \tag{4.11}$$

Reciproc, dacă se dă pentru orice indice $\alpha \in A$ *forma* ω_α *pe* U_α *cu valori în* g, *încât oricare ar fi* $x \in U_\alpha \cap U_\beta, X \in T_xM$, *are loc formula (4.11), atunci există o conexiune* Γ *pe* P *cu forma de conexiune* ω *verificând pentru fiecare indice* $\alpha \in A$ *egalitatea* $\omega_\alpha = z_{\alpha *}\omega$.

Aceasta teoremă este deosebit de importantă pentru calcul.

În particular, se arată că orice conexiune Γ pe fibrarea reperelor liniare $L(M)$ a unei varietăţi diferenţiabile M este o conexiune liniară pe M, în sens Koszul [16], iar formula (4.11) devine pe $L(M)$ exact formula de schimbare a componentelor $\{\Gamma^i_{jk}\}_{i,j,k}$ ale unei conexiuni liniare pe M, la o schimbare de hartă, dacă $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ este un atlas pe M.

Pentru a obţine acest ultim rezultat, se are în vedere că Γ fiind o conexiune pe $L(M)$, rezultă că formele $\omega_\alpha, \alpha \in A$, au valori în algebra Lie a matricelor reale $M_n(\mathbf{R}), n = \dim M$. Se consideră câmpul canonic de repere $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ pe $U_\alpha, \alpha \in A$ şi se notează

$$(\omega_\alpha(\frac{\partial}{\partial x^j}))^i_k = \Gamma^i_{jk}. \tag{4.12}$$

Se are în vedere de asemenea (4.4).

Conexiunea Levi-Civita a unei varietăţi Riemann M este o conexiune pe fibrarea reperelor ortogonale $O(M)$.

Mai mult, dacă varietatea Riemann M este orientabilă, cu o orientare fixată, conexiunea Levi-Civita devine o conexiune pe fibrarea reperelor special ortogonale $SO(M)$.[17]

Se introduce de asemenea *forma de curbură* Ω a unei conexiuni Γ pe o fibrare principală P prin formula:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \tag{4.13}$$

unde ω este forma de conexiune a lui Γ. Se observă că forma de curbură Ω este o 2-formă $g-$ valuată. Dacă se fixează o bază $\{E_i\}_i$ a algebrei Lie g, se pot considera constantele de structură $c^i_{jk}, i, j, k = 1, ..., \dim g$ ale algebrei Lie g în raport cu aceasta precum şi formele reale $\omega^i, \Omega^i, i = 1, ..., \dim g$, definite pe P, încât $\omega = \sum_i \omega^i E_i, \Omega = \sum_i \Omega^i E_i$. Atunci (4.13) se scrie:

$$\Omega^i = d\omega^i + c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, i = 1, ..., \dim g. \tag{4.14}$$

Vom da acum un exemplu de o conexiune pe fibrarea trivială $P = M \times G$, M şi G fiind respectiv o varietate diferenţiabilă reală şi un grup Lie. Acţiunea diferenţiabilă, la dreapta a grupului Lie G pe varietatea diferenţiabilă $M \times G$ este dată în mod natural prin aplicaţia:

$$((x, a), b) \in M \times G \times G \to (x, ab) \in M \times G.$$

Fie τ forma Pfaff canonică pe G, cu valori în $g-$ algebra Lie a grupului Lie G

Vom defini pe $P = M \times G$ o conexiune. Să vedem care este spaţiul vertical $V_u, u = (x, a)$. Având în vedere (4.9), să calculăm $R_{u*}A, (\forall)A \in g$. Fie elementul $A \in g$; există atunci drumul diferenţiabil $b : (-\epsilon, \epsilon) \to G, \epsilon > 0, b(0) = e$ cu proprietatea $\frac{d}{dt}b(t) \mid_{t=0}= A$. Avem $R_u b(t) = (x, ab(t))$, deci $R_{\ u*}A = \frac{d}{dt}(x, ab(t)) \mid_{t=0}= (0, L_{a*}A)$. Deci, în acest caz:

$$V_u = \{(0, L_{a*}A) \mid A \in g\}, (\forall)u = (x, a) \in M \times G.$$

Rezultă:

$$V_u = \{(0, X_a) \mid X_a \in T_aG\}, (\forall)(x,a) \in M \times G.$$

Un complement natural al spaţiului vertical $V_u, u = (x,a)$ este

$$Q_u = \{(X_x, 0) \mid X_x \in T_xM\}, (\forall)u = (x,a) \in M \times G.$$

Se demonstrează imediat că distribuţia

$$u = (x,a) \in P \to (x,0) \in Q_u \subset T_uP,$$
$$P = M \times G,$$

are toate proprietăţile distribuţiei orizontale din definiţia unei conexiuni pe o fibrare principală. Conexiunea astfel obţinută pe fibrarea trivială $P = M \times G$ se numeşte *conexiunea canonică plată.* Notând cu $f : M \times G \to G$ proiecţia pe al doilea factor, se arată că forma de conexiune ω a conexiunii canonice plate este $\omega = f^*\tau$.

De un interes deosebit pentru dezvoltările noastre ulterioare este

Teorema 5. *Fie $f : P'(M, G') \to P(M, G)$ un morfism de fibrări principale ce se proiectează pe aplicaţia identică a varietăţii de bază M şi corespunde morfismului de grupuri Lie $h : G' \to G$ cu proprietatea că diferenţiala sa $h_{*e'} : T_{e'}G' \to T_eG$ este izomorfism de algebre Lie, unde e', e sunt elementele unitate respectiv ale grupurilor Lie G', G. Fie Γ o conexiune pe P având 1-forma de conexiune ω. Atunci există o unică conexiune Γ' pe P' cu proprietatea că aplicaţia f_* duce subspaţiul orizontal al lui P' în subspaţiul orizontal al lui P. În plus, dacă ω' este 1-forma de conexiune a conexiunii Γ' pe P', atunci $f^*\omega = h_*\omega'$.*

Demonstraţie. Definim conexiunea Γ' pe P' prin forma sa de conexiune ω'. Luăm

$$\omega' = h_*^{-1} \circ f^*\omega, \tag{4.15}$$

unde am notat $h_* = h_{*e'}$. Este evident că 1 -forma ω' definită astfel are proprietăţile unei 1-forme de conexiune (vezi Propoziţia 3). În adevăr, fie $X' \in T_{u'}P', u' \in P', a' \in G', a = h(a'), X = f_*X'$. Avem:

$$\omega'(R'_{a'*}X') = h_*^{-1}\omega(f_*R'_{a'*}X') = h_*^{-1}\omega(R'_{a*}X) =$$
$$h_*^{-1}[(ada^{-1})\omega(X)] = [h_*^{-1}(ada^{-1})][h_*^{-1}\omega(X)] =$$
$$(ada'^{-1})\omega'(X').$$

Pentru a proba şi cea de a doua proprietate pe care trebuie să o verifice ω' pentru a fi 1-forma de conexiune a unei conexiuni pe fibrarea principală P', să considerăm $A' \in g', A = h_*(A') \in g$, unde am notat ca de obicei cu g', g respectiv algebra Lie a grupului Lie G' respectiv G. Considerăm A'^*, A^* câmpurile fundamentale de vectori respectiv corespunzătoare lui A', A. Avem:

$$\omega'(A'^*) = h_*^{-1}\omega(A^*) = h_*^{-1}(A) = A'.\square$$

Fibrări asociate

Fie $P = P(M, G)$ o fibrare principală şi F o varietate diferenţiabilă pe care grupul Lie G acţionează diferenţiabil la stânga. Se notează prin juxtapunere atât acţiunea grupului Lie G pe P, dată în definiţia fibrării $P = P(M, G)$, cât şi acţiunea lui G pe F. Se poate defini o acţiune diferenţiabilă, la dreapta a grupului Lie G pe varietatea produs $P \times F$ în modul următor: oricare ar fi $(u, \xi) \in P \times F$ şi $a \in G$ definim aplicaţia

$$((u, \xi), a) \in P \times F \times G \to (u, \xi)a \in P \times F$$
$$(u, \xi)a = (ua, a^{-1}\xi).$$

Fie $E = PF$ spaţiul orbitelor varietăţii produs $P \times F$ modulo acţiunea lui G descrisă mai sus şi $u\xi \in E$ clasa elementului $(u, \xi) \in P \times F$. Iniţial mulţimea E nu posedă nici o structură de varietate diferenţiabilă.

Fie $\pi : P \to M$ proiecţia fibrării P; atunci definim *proiecţia*

$$\pi_E : E \to M, \pi_E(u\xi) = \pi(u), (\forall) u\xi \in E.$$

Oricare ar fi $x \in M$ vom spune că $\pi_E^{-1}(x)$ este fibra deasupra lui x sau, dacă $\pi_E(u\xi) = x$, mai spunem că $\pi_E^{-1}(x)$ este fibra prin $u\xi$.

Fie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o acoperire de trivializare locală a fibrării principale $P = P(M, G)$. Avem atunci (4.1), (4.2) şi putem defini, oricare ar fi $\alpha \in A$ aplicaţia

$$S_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F, S_\alpha(u\xi) = (\pi(u), t_\alpha(u)\xi), (\forall) u\xi \in \pi_E^{-1}(U_\alpha). \tag{4.16}$$

Evident, oricare ar fi indicele $\alpha \in A$, aplicaţia S_α este bijecţie şi

$$S_\alpha^{-1}(x, \xi) = z_\alpha(x)\xi, (\forall)(x, \xi) \in U_\alpha \times F, \tag{4.17}$$

unde $z_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ este secţiunea canonică (vezi 4.6)). Se introduce pe E o structură de varietate diferenţiabilă încât bijecţia $S_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ devine difeomorfism oricare ar fi $\alpha \in A$, iar proiecţia $\pi_E : E \to M$ devine diferenţiabilă.

Vom spune că $E = PF$ este *fibrarea asociată fibrării principale* $P = P(M, G)$, *cu fibra tip (standard)* F, *cu grupul structural* G şi *proiecţia* $\pi_E : E \to M$. Uneori vom nota:

$$E = P \times_G F.$$

Aplicaţiile $S_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F, \alpha \in A$ se numesc *aplicaţiile de trivializare locală ale fibrării* $E = PF$, *corespunzătoare acoperirii de trivializare locală* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Oricare ar fi indicele $\alpha \in A, x \in \pi_E^{-1}(U_\alpha)$, definim bijecţia

$$T_{\alpha,x} : \pi_E^{-1}(x) \to F, T_{\alpha,x}(u\xi) = t_\alpha(u)\xi, (\forall)u\xi \in \pi_E^{-1}(x) \tag{4.18}$$

(vezi şi (4.16)). Avem, oricare ar fi $\xi \in F$:

$$T_{\alpha,x}^{-1}(\xi) = z_\alpha(x)\xi \tag{4.19}$$

(vezi şi (4.17)).

De exemplu, fibrarea asociată fibrării principale a reperelor liniare $L(M)$ cu fibra tip $\mathbf{R}^n, n = \dim M$, este fibrarea tangentă TM.

În adevăr, pe produsul cartezian $L(M)\times \mathbf{R}^n$, grupul $Gl(n; \mathbf{R})$ acţionează în mod natural astfel:

$$(\forall)(u,\xi) \in L(M) \times \mathbf{R}^n, (\forall)a \in Gl(n;\mathbf{R}),$$
$$(u,\xi)a = (ua, a^{-1}\xi) \in Gl(n;\mathbf{R}).$$

Clasa de echivalenţă a perechii $(u,\xi) \in L(M)\times \mathbf{R}^n$ modulo această acţiune a grupului $Gl(n;\mathbf{R})$ va fi $\widehat{(u,\xi)} = \sum \xi^i X_i \in T_xM$, dacă $\xi = (\xi^1,...,\xi^n), u = (x,X), x \in M$, unde $X = (X_1,...,X_n)$. Această identificare este corectă deoarece nu depinde de reprezentantul (u,ξ) al clasei $\widehat{(u,\xi)}$. Deci, orice clasă $\widehat{(u,\xi)}$ este un vector tangent la M.

Invers, fiecărui vector $\xi \in T_xM$ putem face să-i corespundă o clasă astfel; considerăm u_0 reperul canonic din spaţiul tangent T_xM, în raport cu un sistem de coordonate definit într-o vecinătate de coordonate a punctului $x \in M$, iar $(\xi^1,...,\xi^n) \in \mathbf{R}^n$ coordonatele lui în raport cu acest reper.

Din cele de mai sus rezultă $TM = L(M)\times_G \mathbf{R}^n, G = Gl(n; \mathbf{R})$.

La fel, fibrarea asociată fibrării reperelor ortogonale $O(M)$ a unei varietăţi Riemann $n-$ dimensionale, cu fibra tip $\mathbf{R}^n$ este TM ca şi cea asociată fibrării principale a reperelor special ortogonale $SO(M)$, când M este varietate riemanniană, orientabilă.

Observaţie. Cu notaţiile anterioare, dacă $E = PF$ este fibrarea asociată fibrarii principale $P = P(M,G)$ cu fibra tip F, oricare ar fi $u \in P, a \in G, \xi \in F$ avem:

$$(ua)\xi = u(a\xi). \tag{4.20}$$

Studiul secţiunilor unei fibrări vectoriale

În cele ce urmează, $P = P(M,G)$ este o fibrare principală, cu proiecţia $\pi : P \to M$, G fiind un grup liniar. Dacă fibra tip F este un spaţiu vectorial, vom spune că $E = PF$ este *fibrare vectorială*. Notăm ca de obicei $\pi_E : E \to M$ proiecţia.

De exemplu, TM este o fibrare vectorială cu fibra tip $F = \mathbf{R}^n, n = \dim M$.

Fie $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire de trivializare locală a fibrării principale P iar $\{s_\alpha\}_{\alpha\in A}$ familia difeomorfismelor de trivializare locală corespunzătoare, date de (4.1), (4.2). Fie, pe de altă parte, $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ familia difeomorfismelor de trivializare locală a fibrării asociate $E = PF$, difeomorfisme date de (4.16). Se introduc de asemenea aplicaţiile $T_{\alpha,x}, (\forall)\alpha \in A, x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, date de (4.18).

Cu aceste notaţii, demonstrăm:

Propoziţia 6. *Oricare ar fi punctul $x \in M$, fibra deasupra lui $x, \pi_E^{-1}(x)$ este spaţiu vectorial izomorf cu fibra tip F.*

Demonstraţie. Oricare ar fi $u_0 \in \pi_E^{-1}(x)$ un punct fixat, rezultă că $\pi_E^{-1}(x) = \{u_0\xi \mid \xi \in F\}$. În adevăr, oricare $u\xi' \in \pi_E^{-1}(x), u \in P, \xi' \in F$, rezultă, din definiţia aplicaţiei $\pi_E : E \to M$, că $\pi(u) = x$. În acelaşi timp avem şi $\pi(u_0) = x$, deci există $a \in G$ încât $u = u_0 a$. Avem $u\xi' = (u_0 a)\xi' = u_0(a\xi')$,din (4.20). Notând acum $a\xi' = \xi$, deducem $u\xi' = u_0\xi$.

Utilizând structura de spaţiu vectorial real a fibrei tip F, definim pe $\pi_E^{-1}(x)$, fibra deasupra lui $x \in M$, o structură de spaţiu vectorial real.

Operaţiile de adunare, respectiv înmulţire cu scalar, se definesc astfel: oricare ar fi $u_0\xi_1, u_0\xi_2, u_0\xi \in \pi_E^{-1}(x), \lambda \in \mathbf{R}$, avem

$$u_0\xi_1 + u_0\xi_2 =^{def} u_0(\xi_1 + \xi_2), \tag{4.21}$$

$$\lambda(u_0\xi) =^{def} u_0(\lambda\xi). \tag{4.22}$$

Un izomorfism al spaţiilor vectoriale $\pi_E^{-1}(x)$ şi F se obţine considerând aplicaţia $u_0\xi \in \pi_E^{-1}(x) \to \xi \in F$.□

Observaţie. Oricare ar fi $x \in M$ există $\alpha \in A$ cu proprietatea $x \in U_\alpha$. Deducem că $T_{\alpha,x} : \pi_E^{-1}(x) \to F$ (vezi (4.18)) este un izomorfism de spaţii vectoriale, ţinând cont că $t_\alpha(u) \in G, (\forall)u \in \pi^{-1}(x)$ şi G este un grup de transformări liniare, din ipoteză.

În particular, dacă fibra F este o algebră reală iar grupul Lie G este inclus în $AutF-$ grupul automorfismelor algebrei F, oricare ar fi $x \in M$ spaţiul vectorial F, dat de Propoziţia 6, poate fi dotat cu o structură de algebră reală cu produsul a două elemente arbitrare $u_0\xi_1, u_0\xi_2 \in \pi_E^{-1}(x)$ dat prin formula:

$$(u_0\xi_1)(u_0\xi_2) = u_0(\xi_1\xi_2). \tag{4.23}$$

Izomorfismul de spaţii vectoriale $T_{\alpha,x} : \pi_E^{-1}(x) \to F$ devine un izomorfism de algebre deoarece $G \subset AutF$. De asemenea aplicaţia

$u_0\xi \in \pi_E^{-1}(x) \to \xi \in F$ este izomorfism de algebre.

Definiţie. Se numeşte *secţiune* a fibrării asociate $E = PF$ orice aplicaţie diferenţiabilă $\varphi : M \to E$, cu proprietatea $\pi_E \circ \varphi = 1_M$, unde $1_M : M \to M$ este aplicaţia identică.

Vom nota $\Gamma(E)$ spaţiul secţiunilor fibrării $E = PF$.

În particular, secţiunile fibrării tangente TM sunt câmpurile vectoriale pe M.

Dacă $\varphi \in \Gamma(E)$, să observăm că se poate defini oricare ar fi $\alpha \in A$ aplicaţia diferenţiabilă

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to F, \varphi_\alpha(x) = T_{\alpha,x}(\varphi(x)), (\forall)x \in U_\alpha. \tag{4.24}$$

Are loc:

Propoziţia 7. *Dacă $\varphi \in \Gamma(E)$, fie $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ familia aplicaţiilor definite prin (4.24), oricare ar fi indicele $\alpha \in A$.*

Atunci, oricare ar fi punctul $x \in U_\alpha \cap U_\beta, \alpha, \beta \in A$, se verifică egalitatea:

$$\varphi_\beta(x) = s_{\beta\alpha}(x)\varphi_\alpha(x) \tag{4.25}$$

unde $\{s_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ este familia funcţiilor de tranziţie corespunzătoare acoperirii de trivializare locală $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, date de (4.3).

Reciproc, dacă se dau aplicaţiile $\varphi_\alpha : U_\alpha \to F, \alpha \in A$, ce verifică (4.25) oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$ şi punctul $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, atunci există $\varphi \in \Gamma(E)$ o secţiune cu proprietatea $\varphi_\alpha(x) = T_{\alpha,x}(\varphi(x)), (\forall)x \in U_\alpha$.

Demonstraţie. Deoarece avem (4.24), rezultă oricare ar fi $x \in U_\alpha \cap U_\beta, \alpha, \beta \in A$:

$$T^{-1}_{\alpha,x}(\varphi_\alpha(x)) = T^{-1}_{\beta,x}(\varphi_\beta(x)) \tag{4.26}$$

şi atunci din (4.19), deducem:

$$z_\alpha(x)\varphi_\alpha(x) = z_\beta(x)\varphi_\beta(x). \tag{4.27}$$

Din (4.7) şi din proprietatea acţiunii grupului Lie G pe P de a fi liberă, deducem (4.25).

Reciproc, definim $\varphi : M \to E$ prin $\varphi(x) = T^{-1}_{\alpha,x}(\varphi_\alpha(x)), (\forall)x \in U_\alpha, \alpha \in A$. Rămâne de văzut dacă această definiţie este corectă, adică să arătăm că dacă $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, atunci are loc egalitatea (4.26). Dar (4.26) este echivalentă cu (4.27), cum am observat mai sus. Această ultimă egalitate este adevărată, din (4.25), (4.7).□

Să considerăm cazul particular al fibrării asociate fibrării reperelor liniare $L(M)$ a varietăţii diferenţiabile reale $n-$ dimensionale M, cu fibra tip $\mathbf{R}^n$. Aceasta este chiar fibrarea tangentă TM a varietăţii M. O secţiune $\varphi \in \Gamma(TM)$ este de fapt un câmp vectorial pe M. Ţinând cont şi de (4.4), se arată că alegând o acoperire a lui M cu hărţile unui atlas $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, rezultă că formula (4.25) reprezintă chiar formula de schimbare a componentelor câmpului vectorial φ când se trece de la harta (U_α, h_α) la harta (U_β, h_β).

În încheierea acestui paragraf, să remarcăm că, în general, dacă $E = PF$ este o fibrare algebrică, deci fibra tip F este o algebră, atunci oricare ar fi secţiunile φ,$\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(E)$, rezultă că putem defini în mod natural suma $\varphi_1 + \varphi_2$, produsul $\varphi_1\varphi_2$ precum şi multiplicarea $f\varphi$ unde $f \in \mathcal{F}(M)$, considerând:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 : M \to E, (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), (\forall)x \in M \\ \varphi_1\varphi_2 : M \to E, (\varphi_1\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x), (\forall)x \in M, \\ f\varphi : M \to E, (f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x), (\forall)x \in M. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Mai mult, dacă $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este o acoperire de trivializare locală a fibrării principale P, rezultă::

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)_\alpha = \varphi_{1\alpha} + \varphi_{2\alpha}, \\ (\varphi_1\varphi_2)_\alpha = \varphi_{1\alpha}\varphi_{2\alpha}, \\ (f\varphi)_\alpha = f\varphi_\alpha, \end{aligned}$$

oricare ar fi $\alpha \in A$. Aceste relaţii rezultă din proprietatea aplicaţiei $T_{\alpha,x} : \pi^{-1}(x) \to F$ de a fi izomorfism de algebre oricare ar fi $\alpha \in A, x \in U_\alpha$ şi din definiţia (4.24)

Derivarea covariantă a secţiunilor

Fie $E = P\mathbf{R}^n$ fibrarea vectorială asociată fibrării principale $P = P(M, G)$, cu fibra tip spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^n$ şi grupul structural $G \subseteq GL(n; \mathbf{R})$.

Dacă $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este o acoperire de trivializare locală a fibrării principale P, vom utiliza notaţiile din paragrafele precedente pentru difeomorfismele de trivializare locală, funcţiile de tranziţie corespunzătoare, etc. Considerăm Γ o conexiune pe fibrarea principală P. Oricare ar fi o secţiune $\varphi \in \Gamma(E)$ şi pentru orice X un câmp de vectori pe M, putem da următoarea noţiune:

Definiţie. *Derivata covariantă $\nabla_X\varphi$ a secţiunii $\varphi \in \Gamma(E)$ în direcţia câmpului vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$*, în raport cu conexiunea Γ este secţiunea fibrării E corespunzătoare familiei de aplicaţii $\{(\nabla_X\varphi)_\alpha\}_{\alpha\in A}$, unde oricare ar fi indicele $\alpha \in A$, $(\nabla_X\varphi)_\alpha : U_\alpha \to F$,

$$(\nabla_X\varphi)_\alpha = \varphi_{\alpha*}(X) + \omega_\alpha(X)\varphi_\alpha, \tag{4.29}$$

$\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$ fiind familia 1-formelor $g-$ valuate asociate conexiunii Γ, corespunzător acoperirii $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (a se vedea teorema 4).

Pentru buna înţelegere a acestei definiţii se impun unele comentarii.

Oricare ar fi punctul $x \in U_\alpha$, să observăm că $\omega_\alpha(X_x)$ este o transformare liniara a lui $\mathbf{R}^n$, deci are sens $\omega_\alpha(X_x)\varphi_\alpha(x)$ deoarece $\varphi_\alpha(x) \in \mathbf{R}^n$.

Formula (4.29) generalizează formula de derivare covariantă a câmpurilor vectoriale ale unei varietăţi diferenţiabile M în raport cu o conexiune liniară. În adevăr, se are în vedere faptul că orice câmp vectorial pe M este o secţiune a fibrării tangente TM care poate fi privită ca fibrare asociată fibrării $L(M)$ a reperelor liniare a lui M, cu fibra tip $\mathbf{R}^n, n = \dim M$. Pe de altă parte, orice conexiune liniară ∇ pe M este de fapt o conexiune pe fibrarea reperelor liniare $L(M)$. Păstrând notaţiile generale, fie $\varphi \in \Gamma(TM)$ un câmp vectorial pe M, iar $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire a lui M cu vecinătăţi de coordonate. Pentru $\alpha \in A$ fixat, avem

$$\varphi(x) = \varphi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}(x), (\forall)x \in U_\alpha,$$

unde $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ reprezintă câmpul canonic de repere pe U_α.

Atunci $T_{\alpha,x}(\varphi(x)) = \varphi^i_\alpha(x)e_i$, unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este reperul canonic din $\mathbf{R}^n$. Dacă $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, cu notaţia (4.12), formula (4.29) devine:

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\varphi)^s_\alpha = \frac{\partial \varphi^s_\alpha}{\partial x^j} + \Gamma^s_{ji}\varphi^i_\alpha, \tag{4.30}$$

adică bine cunoscuta formulă ce exprimă componentele relativ la o hartă ale derivatei covariante a unui câmp de vectori $\varphi \in \Gamma(TM)$ în direcţia câmpului de vectori X.

În cazul general, se pune problema următoare: definiţia derivatei covariante $\nabla_X\varphi$ a secţiunii $\varphi \in \Gamma(E)$ este corectă? Pentru a răspunde la această întrebare, trebuie studiat dacă în adevăr familia de aplicaţii $\{(\nabla_X\varphi)_\alpha\}_{\alpha\in A}$ defineşte o secţiune a fibrării E. Conform Propoziţiei 7, este de văzut dacă, oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$, se verifică egalitatea:

$$(\nabla_X\varphi)_\beta(x) = s_{\beta\alpha}(x)(\nabla_X\varphi)_\alpha(x), (\forall)x \in U_\alpha \cap U_\beta. \tag{4.31}$$

Utilizând (4.11), (4.29) avem succesiv:

$$\begin{gathered}(\nabla_X\varphi)_\beta(x) = \\ = \varphi_{\beta *}(X_x) + [(ad(s_{\beta\alpha}(x))^{-1}\omega_\alpha(X_x) + \tau(s_{\beta\alpha *}(X_x))]\varphi_\beta(x)\end{gathered} \tag{4.32}$$

Din (4.25), folosind regula Leibnitz [17] de calcul a diferenţialei unei funcţii diferenţiabile definite pe un produs de varietăţi diferenţiabile, deducem:

$$\varphi_{\beta *}(X_x) = s_{\beta\alpha *}(X_x)\varphi_\alpha(x) + s_{\beta\alpha}(x)\varphi_{\alpha *}(X_x). \tag{4.33}$$

Înlocuind (4.33) în (4.32), rezultă (4.31), dacă se foloseşte şi egalitatea:

$$s_{\beta\alpha *}(X_x)s_{\alpha\beta}(x) + s_{\beta\alpha}(x)s_{\alpha\beta^*}(X_x) = 0,$$

ce provine din diferenţierea ambilor membri ai formulei

$$s_{\beta\alpha}(x)s_{\alpha\beta}(x) = e,$$

$e \in G$ fiind elementul neutru. Deci definiţia este corectă. Are loc

Propoziţia 8. *Oricare ar fi secţiunile $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(E)$, funcţia $f \in \mathcal{F}(M)$ şi câmpurile de vectori $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se verifică egalităţile:*

$$\begin{gathered} \nabla_{X+Y}\varphi = \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi, \\ \nabla_{fX}\varphi = f\nabla_X\varphi, \\ \nabla_X f\varphi = f\nabla_X\varphi + (Xf)\varphi, \\ \nabla_X(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla_X\varphi_1 + \nabla_X\varphi_2. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Demonstraţia o lăsăm ca exerciţiu.

Să observăm că proprietăţile (4.34) generalizează axiomele date în definirea unei conexiuni liniare după Koszul.

Prezentăm acum unele generalizări.

Definiţie. Fie $P = P(M, G)$ o fibrare principală şi $\rho : G \to GL(V)$ o reprezentare liniară a grupului Lie G, unde V este un spaţiu vectorial. Atunci se poate defini o acţiune diferenţiabilă, la stânga a grupului Lie G pe spaţiul vectorial V astfel:

$$(a, \xi) \in G \times V \to \rho(a)\xi \in V. \tag{4.35}$$

Fibrarea asociată fibrării principale $P = P(M, G)$, cu fibra tip spaţiul vectorial V, pe care G acţionează la stânga prin intermediul reprezentării ρ, ca în formula (4.35), se numeşte *fibrare vectorială asociată reprezentării* ρ şi se va nota $E = PV_\rho$ sau $E = P \times_\rho V$.

În cazul particular când G este un grup liniar şi $\rho = Id$, se obţine fibrarea vectorială PV asociată fibrării principale P, cu fibra tip spaţiul vectorial V.

Fie $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire de trivializare locală a fibrării principale $P = P(M, G)$. Oricare ar fi $\alpha \in A, x \in U_\alpha$ definim aplicaţia $T_{\alpha,x}$: $\pi_E^{-1}(x) \to V$, prin

$$T_{\alpha,x}(u\xi) = \rho(t_\alpha(u))\xi, (\forall)u\xi \in E = PV_\rho.$$

unde s-au folosit notaţiile definite prin formulele (4.1), (4.2). Rezultă oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$, oricare ar fi $\xi \in V, x \in U_\alpha \cap U_\beta$ formula:

$$T_{\beta,x} \circ T_{\alpha,x}^{-1}(\xi) = \rho(s_{b\alpha}(x))\xi.$$

Definiţie. Fie Γ o conexiune pe fibrarea principală $P = P(M, G)$ şi $\varphi \in \Gamma(PV_\rho)$ o secţiune arbitrară, iar X un câmp de vectori pe M.

Se numeşte *derivata covariantă a secţiunii* φ *în direcţia lui* X, în raport cu conexiunea Γ secţiunea $\nabla_X\varphi \in \Gamma(PV_\rho)$ dată prin formula:

$$(\nabla_X\varphi)_\alpha = \varphi_{\alpha *}(X) + \rho_*(\omega_\alpha(X))\varphi_\alpha \tag{4.36}$$

unde $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este familia $1-$ formelor locale de conexiune ce corespund acoperirii de trivializare locală $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Se demonstrează că definiţia aceasta este corectă. Formula (4.36) generalizează formula (4.29).

5

Fibrarea Clifford

Definiţie. Secţiuni

Fie varietatea riemanniană $n-$ dimensională (M, g) şi $O(M)$ fibrarea reperelor ortogonale a lui M.

Amintim că punctele varietăţii $O(M)$ sunt perechi (x, X) unde $x \in M$, iar $X = (X_1, ..., X_n)$ este reper ortonormat în raport cu g_x, din spaţiul tangent T_xM.

Orice element $u = (x, X) \in O(M)$ poate fi privit deopotrivă ca izometria $u : \mathbf{R}^n \to T_xM, u(e_i) = X_i, (\forall)i \in \{1, ..., n\}$ unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este reperul canonic din $\mathbf{R}^n$.

Reciproc, orice izometrie $u : \mathbf{R}^n \to T_xM$ furnizează un reper $X = (X_1, ..., X_n)$ ortonormat în raport cu g_x al lui T_xM, considerând $X_i = u(e_i), (\forall)i \in \{1, ..., n\}$.

Grupul structural al fibrării $O(M)$ este grupul ortogonal $O(n)$.

Propoziţia 1. *Orice transformare ortogonală $a \in O(n)$ se extinde la un automorfism $\tilde{a} : Cl_n \to Cl_n$.*

Demonstraţie. Din definiţia grupului ortogonal, rezultă că oricare ar fi $a \in O(n)$ şi oricare ar fi $x \in \mathbf{R}^n$ avem $Q(x) = Q(ax)$, unde Q este forma patratică standard pe $\mathbf{R}^n$. În algebra Clifford Cl_n se verifică egalităţile: $x^2 = -Q(x).1, (ax)^2 = -Q(ax).1$, de unde $(ax)^2 = -Q(x).1$. Din proprietatea de universalitate dată în definiţia algebrei Clifford, există un morfism de algebre unic $\tilde{a}$ ce face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & Cl_n & \\ \theta \nearrow & & \searrow \tilde{a} \\ \mathbf{R}^n & \underset{\rightarrow}{a} & Cl_n \end{array}$$

unde $\theta : \mathbf{R}^n \to Cl_n$ este incluziunea canonică.

Fie $\{f_1, ..., f_n\}$ o bază ortonormată arbitrară din $\mathbf{R}^n$ şi

$$\{f_{i_1}...f_{i_s}\}_{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n}, s \in \{0, 1, ..., n\}$$

baza corespunzătoare a algebrei Clifford Cl_n.

Cum aplicaţia $\tilde{a} : Cl_n \to Cl_n$ este morfism de algebre, avem

$$\tilde{a}(f_{i_1}...f_{i_s}) = a(f_{i_1})...a(f_{i_s}),$$
$$(\forall) 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Transformarea $a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ fiind ortogonală, rezultă că

$$\{a(f_1), ..., a(f_n)\}$$

este o bază ortonormată, deoarece $\{f_1, ..., f_n\}$ este o bază ortonormată. Atunci

$$\{a(f_{i_1})...a(f_{i_s})\}_{i_1 < ... < i_s}, s \in \{0, 1, ..., n\}$$

este o bază din Cl_n, deci $\tilde{a}$ duce o bază într-o bază deci este automorfism de algebre.□

Am demonstrat astfel că $O(n) \subset AutCl_n$. Este de observat că orice automorfism $\tilde{a}$ al lui $\mathbf{R}^n$ ce extinde o transformare ortogonală $a \in O(n)$ are proprietatea de a invaria spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$. Se arată imediat că singurele automorfisme ale algebrei Clifford Cl_n ce invariază spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ sunt de această formă. În adevăr, dacă $f \in AutCl_n$ este un automorfism ce invariază $\mathbf{R}^n$, atunci $(\forall) x \in \mathbf{R}^n$, avem $f(x) \in \mathbf{R}^n$; mai mult, din proprietăţile algebrei Clifford:

$$x^2 = -Q(x).1, (f(x))^2 = -Q(f(x)).1.$$

Cum f este automorfism, rezultă $f(x^2) = (f(x))^2$, de unde, $Q(x) = Q(f(x))$. Deci restricţia lui f la $\mathbf{R}^n$ este o transformare ortogonală.

Din teoria generală, deoarece $O(n) \subset AutCl_n$, rezultă că există fibrarea algebrică asociată fibrării reperelor ortogonale $O(M)$, cu fibra tip algebra Clifford $Cl_n, n = \dim M$. Vom nota această fibrare $Cl(M)$ şi o vom numi *fibrarea Clifford* a varietăţii riemanniene M. Se notează uneori:

$$Cl(M) = O(M) \times_{O(n)} Cl_n.$$

Urmărind construcţia generală a fibrărilor asociate, să vedem care sunt punctele varietăţii $Cl(M)$. Oricare ar fi $(u,\varphi) \in O(M) \times Cl_n$, să scriem

$$\varphi = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n\\ s=0,1,...,n}} \varphi^{i_1...i_s} e_{i_1}...e_{i_s}, \varphi^{i_1...i_s} \in \mathbf{R},$$

unde $\{e_1,...,e_n\}$ este baza canonică din $\mathbf{R}^n$. Definim o acţiune la stânga a grupului ortogonal $O(n)$ pe $F = Cl_n$ în modul următor: oricare ar fi $a \in O(n), (u,\varphi) \in O(M) \times Cl_n, u : \mathbf{R}^n \to T_xM-$izometrie,

$$((u,\varphi),a) \in O(M) \times Cl_n \times O(n) \to (u,\varphi)a \in O(M) \times Cl_n$$
$$(u,\varphi)a = (u \circ a, a^{-1}\varphi)$$

unde $u \circ a : \mathbf{R}^n \to T_xM$ este izometria obţinută prin compunerea transformării ortogonale $a \in O(n)$ cu izometria u iar

$$a^{-1}\varphi = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n\\ s=0,1,...,n}} \varphi^{i_1...i_s} a^{-1}(e_{i_1})...a^{-1}(e_{i_s}).$$

Deducem că orbita elementului $(u,\varphi) \in O(M) \times Cl_n$ modulo această acţiune a grupului ortogonal $O(n)$ pe varietatea produs $O(M)XCl_n$ este:

$$u\varphi = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n\\ s=0,1,...,n}} \varphi^{i_1...i_s} X_{i_1}...X_{i_s}, \tag{5.1}$$

unde $\{X_1,...,X_n\}$ este reperul ortonormat în raport cu g_x din spaţiul tangent T_xM obţinut prin $u(e_i) = X_i, (\forall)i \in \{1,...,n\}$.

Din (5.1) deducem că $u\varphi \in Cl(g_x)$ unde $Cl(g_x)$ este algebra Clifford asociată formei patratice $g_x : T_xM \to \mathbf{R}$. Reciproc, orice element din $Cl(g_x)$ este orbita unui element $(u,\varphi) \in O(M) \times Cl_n$, modulo acţiunea grupului ortogonal $O(n)$ pe $O(M) \times Cl_n$. Ca urmare:

$$Cl(M) = \cup_{x\in M} Cl(g_x). \tag{5.2}$$

Notând cu $\pi : Cl(M) \to M$ proiecţia, rezultă că $\pi^{-1}(x) = Cl(g_x)$, oricare ar fi punctul $x \in M$. Deci, fibra fibrării Clifford $Cl(M)$ deasupra oricărui punct $x \in M$ este algebra Clifford $Cl(g_x)$. Este de observat că oricare ar fi punctul $x \in M$, avem incluziunea canonică $T_xM \subset Cl(g_x)$ şi ca urmare $TM \subset CL(M)$.

Să studiem acum secţiunile fibrării Clifford $Cl(M)$. Considerăm $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire de trivializare locală a fibrării $O(M)$ cu vecinătăţi de coordonate normale. Va rezulta (4.4) unde $(x^1,...,x^n), (x'^1,...,x'^n)$ sunt coordonatele pe U_α respectiv U_β iar $s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to O(n)$ sunt funcţiile de tranziţie corepunzătoare acoperirii date, oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$. Orice secţiune $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ va fi dată de o familie

$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A.}, \varphi_\alpha : U_\alpha \to Cl_n, (\forall)\alpha \in A$ încât se verifică condiţiile (4.25). Ca urmare, pentru $\alpha, \beta \in A$ arbitrari avem respectiv:

$$\varphi_\alpha = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}} \varphi_\alpha^{i_1\ldots i_s} e_{i_1}\ldots e_{i_s}, \varphi_\alpha^{i_1\ldots i_s} \in \mathcal{F}(M), \tag{5.3}$$

$$\varphi_\beta = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}} \varphi_\beta^{i_1\ldots i_s} e_{i_1}\ldots e_{i_s}, \varphi_\beta^{i_1\ldots i_s} \in \mathcal{F}(M),$$

unde

$$\varphi_\beta^{i_1\ldots i_s} = \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x'^{i_s}}{\partial x^{j_s}}\varphi_\alpha^{j_1\ldots j_s}, (\forall)_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n.\\ s=0,1,\ldots,n}} \tag{5.4}$$

Formula (5.4) generalizează formula de schimbare a componentelor unui câmp vectorial al lui M la o schimbare de hartă. De altfel, câmpurile vectoriale ale lui M sunt cazuri particulare de secţiuni ale fibrării Clifford $Cl(M\ )$.

Derivarea covariantă în $Cl(M)$

Fie ∇ conexiunea Levi-Civita a varietăţii riemanniene $n-$ dimensionale (M, g).

Oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M)), X \in \mathcal{X}(M)$ se defineşte derivata covariantă a secţiunii φ în direcţia câmpului vectorial X ca o nouă secţiune $\nabla_X\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ definită prin familia de aplicaţii $\{(\nabla_X\varphi)_\alpha\}_{\alpha\in A}$, date prin formula (4.29).

Să explicităm termenul $\omega_\alpha(X)\varphi_\alpha$ din formula (4.29). Cum $\omega_\alpha(X) \in o(n)$, unde $o(n)$ este algebra Lie a grupului ortogonal $O(n)$, există un drum diferenţiabil $a : (-\epsilon, \epsilon) \to a(t) \subset O(n), \epsilon > 0$, cu proprietatea că

$$a(0) = I_n, \dot{\frac{d}{dt}}a(t)\ |_{t=0} = \omega(X), \tag{5.5}$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n. Presupunem că secţiunea $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ se exprimă local prin formula (5.3). Atunci, oricare ar fi $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, deducem:

$$a(t)\varphi_\alpha = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}} \varphi_\alpha^{i_1\ldots i_s} a(t)e_{i_1}\ldots a(t)e_{i_s},$$

având în vedere că $O(n) \subset AutCl_n$. Prin calcul, obţinem, ţinând cont de (5.5):

$$\omega_\alpha(X)\varphi = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_s\le n\\ s=0,1,\ldots,n}} \sum_{j=0}^{s} \varphi_\alpha^{i_1\ldots i_s} e_{i_1}\ldots e_{i_{j-1}}(\omega(X)e_{i_j})e_{i_{j+1}}\ldots e_{i_s}. \qquad (5.6)$$

În particular, dacă φ este câmp vectorial pe M, formula (5.6) devine (4.30) adică exprimarea în coordonate locale a legii de derivare covariantă în direcţia lui X a câmpului de vectori φ. Cum am remarcat anterior, avem $TM \subset Cl(M)$. Deci orice câmp vectorial pe M este o secţiune din $\Gamma(Cl(M))$. Observăm acum că derivarea covariantă a secţiunilor din $\Gamma(Cl(M))$ generalizează pe aceea a secţiunilor din $\Gamma(TM)$.

Propoziţia 2. *Oricare ar fi* $\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M))$ şi $X \in \Gamma(TM)$ *are loc egalitatea:*

$$\nabla_X(\varphi\psi) = (\nabla_X\varphi)\psi + \varphi(\nabla_X\psi). \qquad (5.7)$$

Demonstraţie. Considerăm $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire de trivializare locală a fibrării reperelor ortogonale $O(M)$. Ca urmare, secţiunile φ, respectiv ψ vor fi caracterizate de familia de aplicaţii $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, respectiv $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Deoarece avem egalitatea $(\varphi\psi)_\alpha = \varphi_\alpha\psi_\alpha, (\forall)\alpha \in A$, din formula Leibniz deducem:

$$(\varphi\psi)_{\alpha*}(X_x) = \varphi_{\alpha*}(X_x)\psi_\alpha(x) + \varphi_\alpha(x)\psi_{\alpha*}(X_x), \qquad (5.8)$$

oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M), x \in U_\alpha, \alpha \in A$. Din (4.36), rezultă oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$:

$$\nabla_X(\varphi\psi)_\alpha(x) = (\varphi\psi)_{\alpha*}(X_x) + \omega_\alpha(X_x)(\varphi_\alpha(x)\psi_\alpha(x)). \qquad (5.9)$$

Din (5.6), deducem:

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(X_x)(\varphi_\alpha(x)\psi_\alpha(x)) = (\omega_\alpha(X_x)\varphi_\alpha(x))\psi_\alpha(x) +\\ +\varphi_\alpha(x)(\omega_\alpha(X_x)\psi_\alpha(x)).\end{aligned} \qquad (5.10)$$

Introducând (5.8) şi (5.10) în (5.9) şi ţinând cont de (4.36), rezultă formula cerută (5.7).□

Considerăm, ca şi până acum că M este o varietate riemanniană, cu metrica g. Fie acum $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un câmp ortonormat de repere definit pe un deschis $U \subset M$. Orice secţiune $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ se poate exprima local, pe U, sub forma:

$$\varphi = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_s\le n\\ s=0,1,\ldots,n}} a^{i_1\ldots i_s} e_{i_1}\ldots e_{i_s},\ a^{i_1\ldots i_s} \in \mathcal{F}(U), \qquad (5.11)$$

deoarece oricare ar fi $x \in U$ avem $\varphi(x) \in Cl(g_x)$.

Corolar 3. *Oricare ar fi* $X \in \mathcal{X}(M)$ avem:

$$\begin{aligned}\nabla_X\varphi = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}} X(a^{i_1\ldots i_s})e_{i_1}\ldots e_{i_s}+\\ +\sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}}\sum_{k=1}^{s} a^{i_1\ldots i_s}e_{i_1}\ldots e_{i_{k-1}}(\nabla_X e_{i_k})e_{i_{k+1}}\ldots e_{i_s}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Demonstraţia este imediată aplicând Propoziţia 2 şi ţinând cont că $e_k\in\Gamma(Cl(M)), (\forall)k\in\{1,\ldots,n\}$.

Structura riemanniană

Vom introduce pe fibrarea Clifford $Cl(M)$ o *structură riemanniană* ce va fi notată $<,>$. Fie $\{e_1,\ldots,e_n\}$ un câmp ortonormat de repere definit pe un deschis $U\subset M$.

Vom spune că $I=(i_1,\ldots,i_s)$ este un *multi-indice*, dacă $i_1,\ldots,i_s$ sunt numere naturale satisfăcând condiţiile $1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n$. Numărul $s\in\{0,1,\ldots,n\}$ se va numi *lungimea multi-indicelui* I. Notăm $e_I=e_{i_1}\ldots e_{i_s}$, dacă $I=(i_1,\ldots,i_s)$ este un multi-indice.

Oricare ar fi multi-indicii $I=(i_1,\ldots i_s), J=(j_1,\ldots,j_r)$, definim:

$$<e_I,e_J>=\delta_{IJ} \tag{5.13}$$

unde

$$\delta_{IJ}=\begin{cases}1 \text{ dacă } I=J\\ 0 \text{ dacă } I\neq J\end{cases} \tag{5.14}$$

Este uşor de constatat invarianţa formulei (5.13) la schimbarea câmpului ortonormat de repere $\{e_1,\ldots,e_n\}$, având în vedere ortogonalitatea matricei de trecere.

Este util de observat că (5.13) se poate scrie echivalent sub forma:

$$<e_{i_1}\ldots e_{i_s},e_{j_1}\ldots e_{j_r}>=\delta_{rs}\det(g(e_{i_u},e_{j_v}))_{\substack{u=1,\ldots,s\\ v=1,\ldots,r}} \tag{5.15}$$

oricare ar fi multi-indicii $I=(i_1,\ldots,i_s), J=(j_1,\ldots,j_r)$.

Introducând pe fibrarea Clifford $Cl(M)$ structura riemanniană $<,>$ dată de (5.13), oricare ar fi punctul $x\in M$ fibra $Cl(g_x)$ deasupra lui $x\in M$ este dotată cu produsul scalar $<,>_x$ ce face ca baza

$$\{e_{i_1}(x)\ldots e_{i_s}(x)\}_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n\\ s=0,1,\ldots,n}}$$

să fie ortonormată.

Mai mult, se ştie că $TM\subset Cl(M)$; avem $<,>|_{TM}=g$.

Propoziţia 4. *Dacă* ∇ *este conexiunea Levi-Civita a metricii* g *a varietăţii Riemann* M*, atunci, oricare ar fi* $X \in \mathcal{X}(M), \varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M))$*, are loc egalitatea:*

$$< \nabla_X \varphi, \psi > + < \varphi, \nabla_X \psi >= X < \varphi, \psi > . \qquad (5.16)$$

Demonstraţie. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortonormat de repere definit pe deschisul $U \subseteq M$.

Considerăm secţiunile $\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M))$ date local prin expresia (5.11), respectiv:

$$\psi = \sum_{\substack{1 \le j_1 < ... < j_r \le n \\ r=0,1,...,n}} b^{j_1 ... j_r} e_{j_1} ... e_{j_r}, b^{j_1 ... j_r} \in \mathcal{F}(U). \qquad (5.17)$$

Utilizând (5.11), (5.12), avem:

$$< \nabla_X \varphi, \psi >=< \sum_{\substack{1 \le i_1 < ... < i_s \le n \\ s=0,1,...,n}} X(a^{i_1 ... i_s}) e_{i_1} ... e_{i_s}, \psi > +$$
$$< \sum_{\substack{1 \le i_1 < ... < i_s \le n \\ s=0,1,...,n}} \sum_{k=1}^{s} a^{i_1 ... i_s} e_{i_1} ... e_{i_{k-1}} (\nabla_X e_{i_k}) e_{i_{k+1}} ... e_{i_s}, \psi >$$

unde ψ se exprimă local prin formula (5.17).

Din (5.15), deducem că în suma precedentă toţi termenii care au $r \neq s$ sunt nuli.

Pentru a calcula produsul scalar

$$< e_{i_1} ... e_{i_{k-1}} (\nabla_X e_{i_k}) e_{i_{k+1}} ... e_{i_s}, e_{j_1} ... e_{j_s} >,$$

scriem

$$\nabla_X e_{i_k} = X^t \nabla_{e_t} e_{i_k} = \sum_{u=1}^{n} X^t \Gamma^u_{t i_k} e_u$$

şi apoi punem indicii din mulţimea $S = (i_1, ..., i_{k-1}, u, i_{k+1}, ..., i_s)$ în ordine crescătoare.

Termenii care conţin indici egali se vor anula, deoarece avem formula $e_i^2 = -g(e_i, e_i).1, (\forall) i \in \{1, ..., n\}$, (vezi (3.9)) şi atunci multi - indicii ce se prezintă în produsul scalar au lungimi diferite. Dacă indicii din S sunt distincţi, aranjarea factorilor $e_{i_1} ... e_{i_{k-1}} e_u e_{i_{k+1}} ... e_{i_s}$ în ordinea strict crescătoare a indicilor lor, revine la un număr de schimbări de semn, deoarece are loc de asemenea formula $e_i e_j = -e_j e_i$, oricare ar fi indicii distincţi $i, j \in \{1, ..., n\}$ (vezi (3.9)). Aceleaşi modificări de semn se fac când se schimbă ordinea liniilor din $\det(g(e_u, e_v))_{\substack{u \in S \\ v \in J}}$, unde J este multi-indicele $J = (j_1, ..., j_s)$, pentru a pune elementele $u \in S$ să indexeze liniile matricei $(g(e_u, e_v))_{\substack{u \in S \\ v \in J}}$ în ordine strict crescătoare. Rezultă:

$$< e_{i_1}...e_{i_{k-1}}(\nabla_X e_{i_k})e_{i_{k+1}}...e_{i_s}, e_{j_1}...e_{j_s} >=$$

$$= \begin{vmatrix} g(e_{i_1},e_{j_1}) & g(e_{i_2},e_{j_2}) & . & g(e_{i_1},e_{j_s}) \\ g(e_{i_2},e_{j_1}) & g(e_{i_2},e_{j_2}) & & g(e_{i_2},e_{j_s}) \\ . & . & & . \\ & & & \\ g(e_{i_{k-1}},e_{j_1}) & g(e_{i_{k-1}},e_{j_2}) & ,\ ,\ , & g(e_{i_{k-1}},e_{j_s}) \\ g(\nabla_X e_{i_k},e_{j_1}) & g(\nabla_X e_{i_k},e_{j_2}) & .\ . & g(\nabla_X e_{i_k},e_{j_s}) \\ g(e_{i_{k+1}},e_{j_1}) & g(e_{i_{k+1}},e_{j_2}) & & g(e_{i_{k+1}},e_{j_s}) \\ . & . & & . \\ & & & \\ g(e_{i_s},e_{j_1}) & g(e_{i_s},e_{j_2}) & & g(e_{i_s},e_{j_s}) \end{vmatrix} . \qquad (5.18)$$

Utilizăm acum faptul că ∇ este conexiune metrică, deci:

$$g(\nabla_X e_{i_k}, e_{j_v}) + g(e_{i_k}, \nabla_X e_{j_v}) = Xg(e_{i_k}, e_{j_v}), (\forall)v \in \{1, ..., s\},$$

de unde:

$$g(\nabla_X e_{i_k}, e_{j_v}) + g(e_{i_k}, \nabla_X e_{j_v}) = 0, (\forall)v \in \{1, ..., s\}.$$

Atunci, din (5.18) deducem:

$$< e_{i_1}...e_{i_{k-1}}(\nabla_X e_{i_k})e_{i_{k+1}}...e_{i_s}, e_{j_1}...e_{j_s} >=$$
$$- < e_{i_1}...e_{i_s}, e_{j_1}...e_{j_{k-1}}(\nabla_X e_{j_k})e_{j_{k+1}}...e_{j_s} > .$$

Urmează:

$$< \nabla_X\varphi, \psi >= \sum_{\substack{1\leq j_1<...<j_s\leq n \\ s=0,1,...,n}} X(a^{j_1...j_s})b^{j_1...j_s}+$$
$$+\sum_{\substack{1\leq j_1<...<j_s\leq n \\ s=0,1,...,n}} a^{j_1...j_s}X(b^{j_1...j_s})- < \varphi, \nabla_X\psi >=$$
$$= X < \varphi, \psi > - < \varphi, \nabla_X\psi > .\square$$

Fie M varietate riemanniană orientabilă, cu o orientatre dată. Se poate defini pe $Cl(M)$ o secţiune globală ω. Oricare ar fi un câmp ortonormat de repere pozitiv orientat $\{e_1, ...e_n\}$ definit pe deschisul $U \subseteq M$, considerăm

$$\omega \mid_U = e_1....e_n, n = \dim M. \qquad (5.19)$$

Dacă $U' \subseteq M$ este un alt deschis ca proprietatea $U \cap U' \neq \emptyset$ şi $\{e'_1, ..., e'_n\}$ este un câmp ortonormat de repere pe U', pozitiv orientat, atunci pe $U \cap U'$ avem $e'_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$, unde $(a_i^j(x))_{i,j} \in SO(n), (\forall)x \in U \cap U'$. Calculăm

$$e_1'...e_n' = \sum_{i_1,...,i_n=1}^{n} a_1^{i_1}...a_n^{i_n} e_{i_1}...e_{i_n}. \tag{5.20}$$

Suma din membrul drept din egaliatea (5.20) se desparte în două sume: una cu toţi indicii $i_1, ..., i_n$ distincţi şi una în care cel puţin doi dintre aceşti indici sunt egali. Cea de a doua sumă se anulează deoarece, de exemplu, dacă $i_1 = i_2 = i$ atunci $\sum_{i=1}^{n} a_1^i a_2^i = 0$, matricea $a = (a_j^i)_{ij}$ fiind ortogonală. Deducem că (5.20) devine:

$$e_1'...e_n' = \sum_{\substack{i_1,...,i_n \\ dist.}} a_1^{i_1}...a_n^{i_n} e_{i_1}...e_{i_n}. \tag{5.21}$$

Indicii $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\}$ fiind distincţi, rezultă că $\{i_1, ..., i_n\} = \{1, ..., n\}$. În fiecare termen al sumei din membrul drept al formulei (5.21) putem pune indicii $i_1, ..., i_n$ în ordinea crescătoare. Avem permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ i_1 & i_2 & & i_n \end{pmatrix}.$$

Atunci deducem:

$$\begin{aligned} e_1'...e_n' &= [\textstyle\sum_{i_1,...,i_n=1}^{n} a_1^{i_1}...a_n^{i_n}(sign\sigma)]e_1...e_n = \\ &= (\det a)e_1...e_n = e_1...e_n \end{aligned}$$

deoarece $a \in SO(n)$. Deci secţiunea $\omega\ |_U$ dată prin formula (5.19) se poate extinde la o secţiune globală $\omega \in \Gamma(Cl(M))$.

Secţiunea globală ω are următoarea proprietate:

Propoziţia 5. *Fie (M, g) varietate riemanniană orientabilă şi orientată, iar ω secţiunea globală dată pe deschisul $U \subseteq M$ prin formula (5.19), unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp de repere pozitiv orientat definit pe U. Atunci*

$$\nabla_X \omega = 0, (\forall) X \in \mathcal{X}(M), \tag{5.22}$$

unde ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii g.

Demonstraţie. Vom arăta că

$$< \nabla_X \omega, \psi >= 0, (\forall)\psi \in \Gamma(Cl(M)), (\forall)X \in \mathcal{X}(M). \tag{5.23}$$

Este suficient să probăm că:

$$< \nabla_{e_j}(e_1...e_n), e_{i_1}...e_{i_s} >= 0, \tag{5.24}$$

oricare ar fi multiindicele $I = (i_1, ..., i_s), s \in \{0, 1, ..., n\}, j \in \{1, ..., n\}$. Din Propoziţia 4 avem:

$$< \nabla_{e_j}(e_1...e_n), e_{i_1}...e_{i_s} >= - < e_1...e_n, \nabla_{e_j}(e_{i_1}...e_{i_s}) > . \quad (5.25)$$

Din (5.12) avem:

$$\nabla_{e_j}(e_1...e_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \Gamma_{jk}^{r} e_1...e_{k-1}e_r e_{k+1}...e_n. \quad (5.26)$$

unde am notat $\nabla_{e_j}e_k = \sum_{r=1}^{n}\Gamma_{jk}^{r}e_r, (\forall)j,k \in \{1,...,n\}$. Dacă $r \notin \{1,...,k-1,k+1,...,n\}$ rezultă $r = k$, deci

$$e_1...e_{k-1}e_r e_{k+1}...e_n = e_1...e_n;$$

dacă $r \in \{1,...,k-1,k+1,...,n\}$ atunci, din (3.9) deducem că

$$e_1...e_{k-1}e_r e_{k+1}...e_n = \epsilon e_{j_1}...e_{j_{n-1}}, \epsilon \in \{1,-1\},$$

unde $1 \leq j_1 < ... < j_{n-1} \leq n$, iar $\{j_1,...,j_{n-1}\} = \{1,...,n\}\backslash\{k,r\}$.

Din (5.15), rezultă că egalitatea (5.24) este verificată pentru $s \in \{0,1,...,n-2\}$.

Dacă $s = n-1$, avem imediat:

$$< e_1...e_n, \nabla_{e_j}(e_{i_1}...e_{i_s}) >= 0$$

şi atunci din (5.25) rezultă că egalitatea (5.24) se verifică şi în acest caz.

Dacă $s = n$, atunci din (5.25) deducem (5.24).□

Propoziţia 6. *Oricare ar fi $\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M))$ şi oricare ar fi $i \in \{1,...,n\}$ avem:*

$$< e_i\varphi, e_i\psi >=< \varphi, \psi > \quad (5.27)$$

unde $\{e_1,...,e_n\}$ este un câmp ortonormat de repere definit pe un deschis din M.

Demonstraţie. Este suficient de demonstrat că:

$$< e_i e_{i_1}...e_{i_s}, e_i e_{j_1}...e_{j_r} >=< e_{i_1}...e_{i_s}, e_{j_1}...e_{j_r} >, \quad (5.28)$$

oricare ar fi multiindicii $I = (i_1,...i_s), J = (j_1,...,j_r), s,r \in \{1,...,n\}$.

Se prezintă următoarele cazuri:

- *Cazul 1* . $i \notin \{i_1,...,i_s\} \cup \{j_1,...,j_r\}$

Utilizând (5.15), deducem:

$$< e_i e_{i_1} ... e_{i_s}, e_i e_{j_1} ... e_{j_r} >=$$

$$= \delta_{sr} \begin{vmatrix} g(e_i, e_i) & g(e_i, e_{j_1}) & . \; . \; . & g(e_i, e_{j_r}) \\ g(e_{i_1}, e_i) & g(e_{i_1}, e_{j_1}) & & g(e_{i_1}, e_{j_r}) \\ . & . & & . \\ & & & . \\ g(e_{i_s}, e_i) & g(e_{i_s}, e_{j_1}) & . \; . & g(e_{i_s}, e_{j_r}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g(e_{i_1}, e_{j_1}) & . \; . \; . & g(e_{i_1}, e_{j_r}) \\ . & & . \\ & & \\ g(e_{i_s}, e_{j_1}) & & g(e_{i_s}, e_{j_r}) \end{vmatrix} =< e_{i_1} ... e_{i_s}, e_{j_1} ... e_{j_r} >,$$

deoarece $g(e_i, e_i) = 1$ iar $g(e_i, e_{j_u}) = g(e_i, e_{i_v}) = 0, (\forall) u \in \{1, ..., r\}, v \in \{1, ..., s\}$. Egalitatea(5.28) este astfel verificată pentru acest caz.

- *Cazul 2.* $i \in \{i_1, ..., i_s\}, i \notin \{j_1, ..., j_r\}$

În acest caz, fie $i = i_k, k \in \{1, ..., s\}$. Avem

$$e_i e_{i_1} ... e_{i_s} = e_{i_k} e_{i_1} ... e_{i_s} = (-1)^k e_{i_1} ... \widehat{e_{i_k}} ... e_{i_s},$$

semnul ^ pus deasupra lui e_{i_k} arătând că e_{i_k} lipseşte din produsul respectiv.

Ambii membri al egalităţii (5.28) se anulează deoarece va rezulta un determinant cu o coloană nulă sau linie nulă.

- *Cazul 3.* $i \in \{i_1, ..., i_s\} \cap \{j_1, ..., j_s\}$

Va rezulta:

$$< e_i e_{i_1} ... e_{i_s}, e_i e_{j_1} ... e_{j_r} >=< e_{i_1} ... \widehat{e_i} ... e_{i_s}, e_{j_1} ... \widehat{e_i} ... e_{j_r} >=$$
$$=< e_{i_1} ... e_{i_s}, e_{j_1} ... e_{j_r} >,$$

cum se deduce din dezvoltarea după elementele liniei (sau coloanei) i din determinantul $\det(g(e_{i_u}, e_{j_v}))_{u,v}, u \in \{1, ..., s\}, v \in \{1, ..., r\}$.

Deci egalitatea (5.28) este adevarată în toate cazurile.□

Rezultă imediat:

Corolar 7. *Oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp de vectori unitar şi $\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M))$ are loc egalitatea:*

$$< X\varphi, X\psi >=< \varphi, \psi > \tag{5.29}$$

unde juxtapunerea dintre X şi o secţiune a fibrării Clifford $Cl(M)$ semnifică produsul lor.

Demonstraţia este imediată. Dacă $X \in \mathcal{X}(M)$ are proprietatea $g(X, X) = 1$, atunci alegem un câmp ortonormat de repere $\{e_1, ..., e_n\}$ cu proprietatea $e_1 = X$. În continuare folosim Propoziţia 6.

Definiţie. Oricare ar fi $X, Y \in T_xM, x \in M$ se pune în evidenţă endomorfismul $R_{XY} : Cl(g_x) \to Cl(g_x)$, numit *transformarea de curbură* şi definit prin:

$$R_{XY}\varphi = \nabla_X\nabla_Y\varphi - \nabla_Y\nabla_X\varphi - \nabla_{[X,Y]}\varphi \tag{5.30}$$

oricare ar fi elementul $\varphi \in Cl(g_x)$.

Dacă $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se poate defini de asemenea transformarea de curbură $R_{XY} : \Gamma(Cl(M)) \to \Gamma(Cl(M))$ prin (5.30), oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$.

Este de observat că, în particular, când $\varphi, \psi \in \mathcal{X}(M)$ formula (5.30) este formula de definire a operatorului de curbură al varietăţii riemanniene (M, g).

Un calcul direct, folosind (5.30) şi (5.16) conduce la formula:

$$\begin{aligned} &< R_{XY}\varphi, \psi > + < \varphi, R_{XY}\psi >= 0, \\ &(\forall)\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M)), X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Utilizând (5.30) şi (5.7) deducem de asemenea:

$$\begin{aligned} &R_{XY}(\varphi\psi) = (R_{XY}\varphi)\psi + \varphi(R_{XY}\psi), \\ &(\forall)\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(M)), X, Y \in \mathcal{X}(M), \end{aligned} \tag{5.32}$$

unde juxtapunerea a două secţiuni din $Cl(M)$ denotă produsul lor.

Dăm sub formă de exerciţiu alte câteva proprietăţi.

Exerciţii.

1) Fie (M, g) varietate Riemann orientabilă.

Considerăm ω forma globală definită local pe un deschis $U \subseteq M$ prin (5.19).

Oricare ar fi $x \in M$, fibra deasupra sa a fibrării Clifford $Cl(M)$ este algebra Clifford $Cl(g_x)$. Automorfismul canonic $\alpha : Cl(g_x) \to Cl(g_x)$ dat de $\alpha(X) = -X$ oricare ar fi $X \in T_xM$ conduce la $\mathbf{Z}_2-$ graduarea

$$Cl(g_x) = Cl^+(g_x) \oplus Cl^-(g_x).$$

Arătaţi că

$$Cl^{\pm}(g_x) = \{\varphi \in Cl(g_x) \mid \omega\varphi = \pm\varphi\}.$$

2) Arătaţi că $\varphi \in Cl^{\pm}(g_x)$ implică $\nabla_X\varphi \in Cl^{\pm}(g_x)$, oricare ar fi $X \in T_xM$. *Indicaţie.* Avem $\nabla_X(\omega\varphi) = \omega\nabla_X\varphi$ deoarece $\nabla_X\omega = 0$.

3) Oricare ar fi $X, Y \in T_xM, x \in M$, transformarea de curbură

$$R_{XY} : Cl(g_x) \to Cl(g_x)$$

are proprietatea de a păstra $Cl^{\pm}(g_x)$. *Indicaţie.* Se foloseşte definiţia transformării de curbură precum şi exerciţiul precedent.

6

Operatorul Dirac

Fibrări Dirac

În paragraful 3.2 am studiat câteva proprietăţi ale Cl_n- modulelor.

Fie S o fibrare vectorială de bază varietatea riemanniană, $n-$ dimensională (M, g), cu proiecţia π, cu fibra tip un Cl_n-modul V. Există deci o reprezentare $\rho : Cl_n \to Hom(V, V)$ şi vom nota ca de obicei multiplicarea Clifford $\rho(\varphi)v = \varphi.v, (\forall)v \in V, \varphi \in Cl_n$. Să observăm că fibra $\pi^{-1}(x) = S_x$ deasupra oricărui punct $x \in M$ este un Cl_n-modul izomorf cu fibra tip V. În adevăr, formula (4.18) defineşte pentru fiecare $x \in M$ un izomorfism $T_{\alpha,x} : \pi^{-1}(x) \to V$. Atunci putem considera reprezentarea $\rho' : Cl_n \to Hom(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x))$ definită prin formula $\rho'(\varphi)(u\xi) = T^{-1}_{\alpha,x} \circ \rho(\varphi) \circ T_{\alpha,x}(u\xi)$.

Un exemplu de astfel de fibrare este chiar fibrarea Clifford $Cl(M)$. În adevăr, fibra tip a acestei fibrări este Cl_n. Pe de altă parte, Cl_n este Cl_n- modul prin reprezentarea:

$$\rho_s : Cl_n \to Hom(Cl_n, Cl_n), \rho_s(\varphi)\psi = \varphi\psi, (\forall)\varphi, \psi \in Cl_n,$$

unde juxtapunerea $\varphi\psi$ denotă produsul elementelor respective în algebra Clifford Cl_n. Deci, în acest caz particular, multiplicarea Clifford este înmulţirea la stânga din algebra Clifford Cl_n.

Se poate defini de asemenea repezentarea:

$$\rho_d : Cl_n \to Hom(Cl_n, Cl_n), \rho_d(\varphi)\psi = \psi\varphi, (\forall)\varphi, \psi \in Cl_n$$

şi, în acest caz, multiplicarea Clifford este înmulţirea la dreapta din Cl_n.

Definiţie. Se numeşte *fibrare Dirac* o fibrare vectoriala S cu baza varietatea riemanniană $n-$ dimensională (M,g), cu fibra tip un Cl_n-modul, dotată cu o structură riemanniană $<,>$ încât se verifică oricare ar fi $\sigma_1,\sigma_2,\sigma\in\Gamma(S), e, X\in\mathcal{X}(M), g(e,e)=1$, $\varphi\in\Gamma(Cl(M))$ formulele:

$$< e.\sigma_1, e.\sigma_2 >=< \sigma_1,\sigma_2 >, \tag{6.1}$$

$$\nabla^S_X(\varphi.\sigma)=(\nabla_X\varphi).\sigma+\varphi.(\nabla^S_X\sigma), \tag{6.2}$$

$$X< \sigma_1,\sigma_2 >=< \nabla^S_X\sigma_1,\sigma_2 > + < \sigma_1,\nabla^S_X\sigma_2 > \tag{6.3}$$

unde ∇^S_X este derivarea covariantă în direcţia lui X indusă de conexiunea Levi-Civita a metricii g a varietăţii de bază M. [18]

Dacă S este o fibrare Dirac, atunci formula (6.1) este echivalentă cu

$$< e.\sigma_1,\sigma_2 > + < \sigma_1, e.\sigma_2 >=0 \tag{6.4}$$

oricare ar fi $e\in\mathcal{X}(M), g(e,e)=1,\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma(S)$.

Definiţia fibrării Dirac poate fi extinsă pentru cazul în care varietatea M de bază este pseudo-riemanniană. În acest caz, fibra tip a fibrării Dirac va fi un spaţiu vectorial de reprezentare pentru algebra Clifford asociată formei patratice Q, de aceeaşi signatură cu metrica varietăţii pseudo-riemanniene M.

Definiţie. Fie S o fibrare Dirac şi $D:\Gamma(S)\to\Gamma(S)$ operatorul diferenţial de ordin întâi, numit *operatorul Dirac*, definit prin formula:

$$D\sigma=\sum_{i=1}^{n} e_i.\nabla^S_{e_i}\sigma, (\forall)\sigma\in\Gamma(S), \tag{6.5}$$

unde $\{e_1,...,e_n\}$ este un câmp de repere oronormat definit pe un deschis al varietăţii de bază M, iar ∇ este derivarea covariantă a secţiunilor fibrării Dirac S indusă de către conexiunea Levi-Civita a metricii g a varietăţii M.

Este un exerciţiu elementar demonstrarea invarianţei operatorului Dirac D la schimbarea câmpului ortonormat de repere $\{e_1,...,e_n\}$.

Exemple

1) Acesta este un exemplu de importanţă istorică, ce a condus la introducerea algebrelor Clifford.

În 1920, fizicianul P.A.M. Dirac a căutat un operator diferenţial de ordinul I, Lorentz-invariant al cărui patrat să fie operatorul Klein-Gordon:

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}).$$

Investigaţiile sale l-au condus la ideea că un astfel de operator trebuie să se exprime cu ajutorul unor matrice $\gamma_0, ..., \gamma_3$ supuse condiţiilor:

$$\begin{aligned} \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\epsilon_i\delta_{ij}I, \\ (\forall)i, j \in \{0, ..., 3\} \end{aligned} \tag{6.6}$$

unde $-\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$.

Astfel, el a construit aşa numita *algebră Dirac*. Dirac a considerat mai întâi matricele Pauli $\sigma_0, ..., \sigma_3$, care sunt matrice complexe de ordin 2, ce verifică condiţiile:

$$\begin{gathered} \sigma_j^2 = I_2, (\forall)j \in \{0, ..., 3\} \\ \sigma_j\sigma_k = \mathrm{i}\sigma_l, (\forall)j, k, l \in \{1, 2, 3\}, j, k, l - distic\c{t}i \end{gathered}$$

Cu ajutorul lor, el a construit matricele Dirac:

$$\gamma_0 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{vmatrix}, \gamma_j = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{vmatrix}, j = 1, 2, 3.$$

Aceste matrice verifică condiţiile cerute (6.6). Dirac a scris operatorul D ce-i poartă numele sub forma:

$$D = \gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

De fapt, matricele Dirac dau o reprezentare pe spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^4$ a algebrei Clifford asociate formei patratice $Q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, care se exprimă în raport cu reperul canonic sub forma:

$$Q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, (\forall)x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4.$$

2) Vom da un exemplu care generalizează construcţia de mai sus, în privinţa dimensiunii.

Fie $M = \mathbf{R}^n$, cu metrica standard, iar V un Cl_n-modul. Considerăm $S = \mathbf{R}^n \times V$, ca fibrarea vectorială de bază $\mathbf{R}^n$ şi fibra Cl_n-modulul V. Atunci S este o fibrare Dirac. Deoarece V este Cl_n- modul, există $\gamma_i \in Hom(V, V), i \in \{1, ..., n\}$ cu proprietatea (6.6), oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$, unde $\epsilon_k = 1, (\forall)k \in \{1, ...n\}$. Alegând o bază în spaţiul vectorial V, aplicaţiile liniare $\gamma_k, k \in \{1, ..., n\}$ pot fi reprezentate matriceal. Operatorul Dirac se scrie:

$$D = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Deducem, succesiv, utilizând condiţiile (6.6), că:

$$\begin{gathered} D^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_j\gamma_k \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} = \\ \sum_{j<k}(\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j)\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - \sum_j \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2} I_n = \Delta I_n \end{gathered}$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n, iar $\Delta = -\sum_j \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2}$ este laplacianul din $\mathbf{R}^n$.

3) Exemplul de mai sus, particularizat în dimensiuni mici, dă interpretări interesante ale operatorului Dirac.

Dacă $n = 1$, $Cl_1 = \mathbf{C}$ şi considerând $V = \mathbf{C}$, deducem $D = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

Dacă $n = 2$, $Cl_2 \simeq \mathbf{H} \simeq \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$, unde $\mathbf{H}$ este algebra quaternionilor, iar izomorfismul său cu $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ corespunde $\mathbf{Z}_2-$ graduării $Cl_2 = Cl_2^0 \oplus Cl_2^1$ prin identificarea:

$$u + ve_2e_1 \simeq u + \mathbf{i}v \simeq ue_1 + ve_2,$$

unde $\{e_1, e_2\}$ este baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$. Alegând reprezentarea $\rho : Cl_2 \to Hom(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2)$,

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix},$$

deducem operatorul Dirac:

$$D = e_1\frac{\partial}{\partial x^1} + e_2\frac{\partial}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & o \end{pmatrix}$$

unde $\frac{\partial}{\partial z} =^{def} \frac{\partial}{\partial x^1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} =^{def} \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x^2}$.

Remarcăm că o secţiune $\varphi \in \Gamma(S)$ este o aplicaţie σ: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}^2, \sigma = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Mai mult, $\sigma \in \Gamma(S)$ este în nucleul operatorului Dirac (adică $D\sigma = 0$) dacă şi numai dacă funcţiile $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ satisfac condiţiile Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.$$

4) Fibrarea Clifford a unei varietăţi riemanniene (M, g), de dimensiune n, notată $Cl(M)$, este un exemplu de fibrare Dirac, având în vedere (5.29), (5.7), (5.16). Fiecare fibră $Cl(g_x)$ este Cl_n- modul cu multiplicarea Clifford dată de înmulţirea la dreapta sau la stânga din algebra Clifford $Cl(g_x)$.

Vom studia ulterior proprietăţile speciale ale operatorului Dirac pe fibrarea Clifford $Cl(M)$.

În încheierea acestui paragraf, vom da câteva proprietăţi generale ale operatorului Dirac pe o fibrare Dirac.

Pentru a putea demonstra o primă proprietate, precizăm câteva noţiuni de bază legate de operatorii diferenţiali eliptici definiţi pe o varietate diferenţiabilă M.

Fie $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un $n-$uplu de numere naturale nenule. Vom nota $\mid \alpha \mid = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ şi oricare ar fi $\xi \in \mathbf{R}^n$ vom folosi notaţia $\xi^\alpha =$

$\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}...\xi_n^{\alpha_n}$. Local, în raport cu un sistem de coordonate $(x_1, ..., x_n)$ pe M, se consideră pentru fiecare $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ operatorul diferenţial:

$$\mathrm{i}^{|\alpha|}D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dacă E o fibrare vectorială, fie $\Gamma(E)$ spaţiul secţiunilor sale.

Definiţie. Fie E, F fibrări vectoriale complexe cu baza varietatea diferenţiabilă M. Un *operator diferenţiabil de ordin* m pe M este o aplicaţie liniară $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$, astfel încât se verifică următoarea proprietate:

Orice punct al varietăţii difereniabile M posedă o vecinătate U, cu coordonate locale $(x_1, ..., x_n)$ şi trivializările locale $E_{|U} \simeq U \times \mathbf{C}^p$, $F_{|U} \simeq U \times \mathbf{C}^q$ cu proprietatea că, în raport cu acestea, P se scrie:

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} A^\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \tag{6.7}$$

unde $A^\alpha(x)$ este o matrice de ordin $q \times p$ de funcţii diferenţiabile cu valori complexe şi există $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ cu $| \alpha |= m$ încât $A^\alpha \neq 0$.

Un *operator diferenţiabil de ordin* m, *real*, se defineşte analog, înlocuind corpul complex $\mathbf{C}$ cu cu corpul real $\mathbf{R}$.

Definim acum *simbolul principal* al unui operator diferenţiabil.

Fie vecinătatea de coordonate U, cu coordonatele $(x_1, ..., x_n)$ şi trivializările locale date în definiţia de mai sus a operatorului diferenţiabil P, care local are expresia (6.7). Simbolul principal al lui P face să corespundă fiecărui vector cotangent $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k dx^k \in T_x^*M$ aplicaţia liniară:

$$\sigma_\xi(P) : E_x \to F_x, \sigma_\xi(P) = \mathrm{i}^m \sum_{|\alpha|=m} A^\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{6.8}$$

unde E_x, F_x reprezintă fibra deasupra lui $x \in M$ din fibrarea vectorială E, respectiv F.

Un operator diferenţiabil de ordin m se numeşte *eliptic* dacă şi numai dacă pentru orice vector cotangent nenul $\xi \in T_x^*M$, simbolul principal $\sigma_\xi(P) : E_x \to F_x$ este inversabil.

De exemplu, operatorul Laplace Δ, definit pe funcţii, este eliptic.

Propoziţia 1. *Operatorul Dirac al unei fibrări Dirac este un operator eliptic.*

Demonstraţie. Fie fibrarea Dirac S de bază varietatea riemnniană (M, g) şi $D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ operatorul Dirac definit prin formula (6.5), unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortogonal de repere definit pe deschisul $U \subseteq M$. Fixând punctul $x \in M$, putem defini pe U un sistem de coordonate $(x_1, ..., x_n)$ cu proprietatea că x are toate coordonatele nule, iar $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) = e_j(x)$, oricare ar fi $j \in \{1, ..., n\}$. Ca urmare, în punctul fixat $x \in U$, avem

$$\nabla^S_{e_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} |_x + termeni\ de\ ordin\ zero$$

iar operatorul Dirac se scrie :

$$D = \sum_{j=1}^{n} e_j(x).\frac{\partial}{\partial x_j} |_x + termeni\ de\ ordin\ zero.$$

Ţinând cont de (6.8), avem:

$$\sigma_\xi(D) : S_x \to S_x, \sigma_\xi(D) = \mathbf{i}\sum_{j=1}^{n} e_j(x)\xi_j = \mathbf{i}\xi, \tag{6.9}$$

oricare ar fi vectorul cotangent $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(dx_j)(x) \in T_x^*M$,

Prin identificarea canonică, $T_xM \simeq T_x^*M$. Este de remarcat că oricare ar fi vectorul $v \in S_x$, avem $\sigma_\xi(D)(v) = \mathbf{i}\xi.v$, unde $\xi.v$ denotă multiplicarea Clifford existentă în fiecare fibră S_x a fibrării Dirac S.

Deducem că $\sigma_\xi(D) \circ \sigma_\xi(D)(v) = -\xi.\xi.v = -\xi^2.v = -g_x(\xi)v, (\forall)v \in S_x$. Ca urmare, $\sigma_\xi(D) \circ \sigma_\xi(D) = -g_x(\xi)Id$, ceeace ne arată că pentru orice vector cotangent nenul $\xi \in T_x^*M$, aplicaţia $\sigma_\xi(D) : S_x \to S_x$ este inversabilă. Rezultă că operatorul Dirac D este eliptic.$\square$

Varietăţile compacte vor fi considerate *fără bord.*

Fie S o fibrare Dirac cu varietatea de bază M o varietate compactă. Se defineşte un produs scalar (,) pe spaţiul secţiunilor $\Gamma(S)$ astfel:

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \int_M < \sigma_1, \sigma_2 >, (\forall)\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(S). \tag{6.10}$$

Avem următoarea propoprietate:

Teorema 2. *Operatorul Dirac D al unei fibrări Dirac S este formal autoadjunct în raport cu produsul scalar (,) definit prin formula (6.10).*

Demonstraţie. Considerăm $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp de repere, definit pe deschisul $U \subseteq M$, normal în punctul $x \in M$. Deci avem $(\nabla_{e_i}e_j)(x) = 0$, oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Oricare ar fi secţiunile $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(S)$, avem din (6.5), (6.1):

$$< D\sigma_1, \sigma_2 >= \sum_{j=1}^{n} < e_j.\nabla^S_{e_j}\sigma_1, \sigma_2 >=$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} < \nabla^S_{e_j}\sigma_1, e_j.\sigma_2 > .$$

În continuare, din (6.3), deducem:

$$< D\sigma_1, \sigma_2 >= \sum_{j=1}^{n}[-e_j < \sigma_1, e_j.\sigma_2 > + < \sigma_1, \nabla^S_{e_j}(e_j.\sigma_2 >].$$

Din (6.2), avem, oricare ar fi $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\nabla^S_{e_j}(e_j.\sigma_2) = (\nabla_{e_j} e_j).\sigma_2 + e_j.\nabla^S_{e_j}\sigma_2$$

egalitate care *în punctul* x fixat devine:

$$\nabla^S_{e_j}(e_j.\sigma_2) = e_j.\nabla^S_{e_j}\sigma_2.$$

Deci, *în punctul* x :

$$< D\sigma_1, \sigma_2 >= \sum_{j=1}^{n}[-e_j < \sigma_1, e_j.\sigma_2 > + < \sigma_1, e_j.\nabla^S_{e_j}\sigma_2 >].$$

Notăm cu V câmpul de vectori tangenţi la M, definit prin formula:

$$V = -\sum_{i=1}^{n} < \sigma_1, e_i.\sigma_2 > e_i$$

şi rezultă, *în punctul* x fixat:

$$< D\sigma_1, \sigma_2 >= divV + < \sigma_1, D\sigma_2 > . \tag{6.11}$$

Egalitatea (6.11), dedusă iniţial în punctul fixat $x \in U$, poate fi demonstrată în orice punct din M deoarece operatorul Dirac este invariant la schimbarea câmpului ortonormat de repere, pe de o parte, iar pe de alta, putem alege câmp normal de repere în orice punct. Utilizând definiţia (6.10) rezultă că:

$$(D\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, D\sigma_2).\Box \tag{6.12}$$

Vom nota respectiv $\ker D, \ker D^2$ nucleele celor doi operatori. O secţiune $\sigma \in \ker D$ se va numi *secţiune Dirac*.

Are loc:

Propoziţia 3. *Fie* $D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ *operatorul Dirac pe fibrarea Dirac* S. *Atunci:*

$$\ker D = \ker D^2 \tag{6.13}$$

şi au dimensiune finită.

Demonstraţie. Fie $\sigma \in \Gamma(S)$ o secţiune Dirac. Rezultă $D(D\sigma) = D^2\sigma = 0$.

Pe de altă parte, avem, ca urmare a egalităţii (6.12):

$$(D\sigma, D\sigma) = (\sigma, D^2\sigma),$$

deci $D^2\sigma = 0$ va implica $(D\sigma, D\sigma) = 0$, de unde $D\sigma = 0$.

Dimensiunea nucleului operatorului Dirac D este finită, acesta fiind un operator eliptic.$\Box$

Identitatea Bochner

Facem mai întâi câteva consideraţii de ordin mai general. Fie E o fibrare vectorială, riemanniană cu baza varietatea riemanniană M. Considerăm derivarea covariantă ∇ indusă de conexiunea Levi-Civita a lui M pe spaţiul $\Gamma(E)$ al secţiunilor fibrării E. Oricare ar fi câmpurile vectoriale $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, fie $\nabla^2_{XY} : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, aplicaţia dată prin formula:

$$\nabla^2_{XY}\varphi = \nabla_X\nabla_Y\varphi - \nabla_{\nabla_X Y}\varphi.(\forall)\varphi \in \Gamma(E). \tag{6.14}$$

Definim *laplacianul de conexiune* $\nabla^*\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ prin formula:

$$\nabla^*\nabla\varphi = -trace(\nabla^2_{..}\varphi), \tag{6.15}$$

adică:

$$\nabla^*\nabla\varphi = -\sum_{i=1}^{n}\nabla^2_{e_ie_i}\varphi \tag{6.16}$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortonormat de repere pe M.

Fibrarea E fiind riemanniană există pe fiecare fibră un produs scalar $<,>$, care face posibilă definirea unui produs scalar $(,)$ pe $\Gamma(E)$, în cazul în care M este compactă. Acest produs scalar este dat prin formula:

$$(\varphi, \psi) = \int_M <\varphi, \psi>, (\forall)\varphi, \psi \in \Gamma(E). \tag{6.17}$$

Introducem de asemenea notaţia:

$$\begin{array}{c} (\nabla\varphi, \nabla\psi) = \int_M <\nabla\varphi, \nabla\psi>, \\ <\nabla\varphi, \nabla\psi> =^{def} \sum_{j=1}^{n} <\nabla_{e_j}\varphi, \nabla_{e_j}\psi>, (\forall)\varphi, \psi \in \Gamma(E). \end{array} \tag{6.18}$$

Observăm că, renunţând la condiţia de compacitate a varietăţii de bază M, putem da definiţia (6.17) oricare ar fi secţiunile $\varphi, \psi \in \Gamma(E)$, *cu suport compact*.

Propoziţia 4. *Laplacianul de conexiune $\nabla^*\nabla$ este nenegativ şi formal autoadjunct, în raport cu produsul scalar $(,)$. Dacă varietatea de bază M este compactă, fară bord, $\nabla^*\nabla\varphi = 0$ dacă şi numai dacă φ este secţiune globală paralelă.*

Demonstraţie. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp de repere normal în punctul $x \in M$ arbitrar fixat. Avem succesiv:

$$\begin{array}{c} <\nabla^*\nabla\varphi, \psi> = -\sum_{j=1}^{n} <\nabla_{e_j}\nabla_{e_j}\varphi, \psi> = \\ = \sum_{j=1}^{n}[-e_j <\nabla_{e_j}\varphi, \psi> + <\nabla_{e_j}\varphi, \nabla_{e_j}\psi>] = \\ = -divV + <\nabla\varphi, \nabla\psi>, \end{array} \tag{6.19}$$

unde V este câmpul de vectori tangent definit de condiţia:

$$< V, W >=< \nabla_W \varphi, \psi >, (\forall) W \in \mathcal{X}(M).$$

Ultima parte a egalitătţii (6.19) se verifică astfel, *în punctul* x :

$$\begin{aligned} divV &=^{def} \textstyle\sum_{j=1}^{n} < \nabla_{e_j} V, e_j >= \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} e_j < V, e_j > . \end{aligned}$$

Prin integrare pe M, din (6.19) deducem:

$$(\nabla^* \nabla \varphi, \psi) = (\nabla \varphi, \nabla \psi). \tag{6.20}$$

Utilizând şi simetria produsului scalar, relaţia (6.20) ne arată că:

$$(\nabla^* \nabla \varphi, \psi) = (\varphi, \nabla^* \nabla \psi), \tag{6.21}$$

deci $\nabla^* \nabla$ este formal autoadjunct.

Ultima afirmaţie este evidentă din (6.20), (6.18) dacă se are în vedere că $\varphi \in \Gamma(E)$ este, prin definiţie, global paralelă dacă şi numai dacă $\nabla_{e_i} \varphi = 0, (\forall) i \in \{1, ..., n\}$ şi oricare ar fi câmpul ortonormat de repere $\{e_1, ..., e_n\}$.$\square$

În Propoziţia precedentă, ipoteza că varietatea M este fără bord ne permite să tragem concluzia că

$$\int_M divV = 0.$$

Amintim că vom considera numai varietăţi compacte, fără bord.

Considerăm acum S o fibrare Dirac cu varietatea de bază varietatea riemanniană M. Consideraţiile anterioare sunt valabile, în acest caz particular.

Definim operatorul $\mathcal{R} : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$,

$$\mathcal{R} \varphi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} e_j . e_k . R_{e_j e_k} \varphi, (\forall) \varphi \in \Gamma(S), \tag{6.22}$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortonormat de repere, $R_{XY} : \Gamma(S) \to \Gamma(S), X, Y \in \mathcal{X}(M)$, este transformarea de curbură definită în fiecare punct $x \in M$ prin formula (5.30) şi "." este multiplicarea Clifford.

Exerciţiu. Să se demonstreze invarianţa membrului drept al formulei (6.22) la schimbarea câmpului ortogonal de repere considerat.

Are loc

Teorema 5 (Identitatea lui Bochner). *Pe orice fibrare Dirac S are loc egalitatea:*

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \mathcal{R}. \tag{6.23}$$

Demonstraţie. Ambii membri ai egalităţii (6.23) sunt invarianţi la schimbarea câmpului ortogonal de repere. Vom arăta că (6.23) se verifică în orice punct $x \in M$. Alegem $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp de repere normal în punctul $x \in M$. Avem succesiv, *în punctul* x:

$$D^2 = \sum_{j,k=1}^n e_j.\nabla_{e_j}(e_k.\nabla_{e_k}) =$$
$$\sum_{j,k=1}^n e_j.e_k.\nabla_{e_j}\nabla_{e_k} = \sum_{j,k=1}^n e_j.e_k.\nabla^2_{e_je_k}.$$

Avem în vedere însă că:

$$e_i^2 = -1, e_ie_j = -e_je_i, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j.$$

Deducem că (6.23) se verifică în punctul x fixat, deoarece:

$$\sum_{j,k=1}^n e_j.e_k.\nabla^2_{e_je_k} = -\sum_{j=1}^n \nabla^2_{e_je_j} + \sum_{j<k} e_j.e_k(\nabla^2_{e_je_k} - \nabla^2_{e_ke_j}).\square$$

7

Teoreme Bochner

Operatorul Dirac pe fibrarea Clifford

După cum am observat deja, fibrarea Clifford $Cl(M)$ a unei varietăţi riemanniene (M, g) este un caz particular de fibrare Dirac. Fiecare fibră a sa, $Cl(g_x), x \in M$, este Cl_n- modul, $n = \dim M$, cu multiplicarea Clifford dată fie prin înmulţirea la dreapta, fie prin înmulţirea la stânga în algebra Clifford $Cl(g_x)$. În plus, se verifică condiţiile (5.29), (5.7), (5.16), care sunt respectiv cazuri particulare ale condiţiilor (6.1), (6.2), (6.3) ce se impun în definiţia unei fibrări Dirac.

Fie

$$D : \Gamma(Cl(M)) \to \Gamma(Cl(M)), \widehat{D} : \Gamma(Cl(M)) \to \Gamma(Cl(M))$$

operatorii Dirac pe fibrarea $Cl(M)$, daţi respectiv prin formulele:

$$D\varphi = \sum_{i=1}^{n} e_i \nabla_{e_i} \varphi, \ (\forall)\varphi \in \Gamma(Cl(M)), \tag{7.1}$$

$$\widehat{D}\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\varphi)e_i, \ (\forall)\varphi \in \Gamma(Cl(M)), \tag{7.2}$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortonormat de repere definit local pe varietatea de bază M.

Definim ca şi în cap. 3, Propoziţia 5 (vezi formula (3.10)) izomorfismul de spaţii vectoriale $h : Cl_n \to \wedge^*\mathbf{R}^n$ dat astfel:

$$\begin{aligned} &h(e_{i_1}...e_{i_s}) = \omega^{i_1} \wedge ... \wedge \omega^{i_s}, \\ &0 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, 1, ..., n\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ respectiv $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ reprezintă o bază ortonormată din spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$, respectiv duala sa.

Cum remarcam şi acolo, izomorfismul de spaţii vectoriale $h : Cl_n \to \wedge^*\mathbf{R}^n$, dat de formula (7.3) nu este şi un izomorfism de algebre. Dacă ar fi izomorfism de algebre, ar trebui, în particular, să avem egalitatea: $h(e_i^2) = \omega^i \wedge \omega^i, (\forall) i \in \{1, ..., n\}$, care ar conduce la $-1 = 0$, ceea ce *este fals*. Avem:

Propoziţia 1. *Oricare ar fi vectorul $v \in \mathbf{R}^n$ şi $\varphi \in Cl_n$ rezultă:*

$$h(v\varphi) = h(v) \wedge h(\varphi) - i(v)h(\varphi). \tag{7.4}$$

Demonstraţie. Utilizăm notaţiile anterioare.

Este suficient să demonstrăm formula (7.4) alegând:

$$v = te_1, t \in \mathbf{R}, \varphi = e_{i_1}...e_{i_s}, 0 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Avem:

$$v\varphi = \begin{cases} -te_{i_2}...e_{i_s}, \ \textit{dacă } i_1 = 1 \\ te_1 e_{i_1}...e_{i_s}, \ \textit{dacă } i_1 \neq 1 \end{cases}$$

Deci:

$$h(v\varphi) = \begin{cases} -t\omega^{i_2} \wedge ... \wedge \omega^{i_s}, \ \textit{dacă } i_1 = 1 \\ t\omega^1 \wedge \omega^{i_1} \wedge ... \wedge \omega^{i_s}, \ \textit{dacă } i_1 \neq 1. \end{cases} \tag{7.5}$$

Utilizând (7.5) şi egalitatea,

$$i(v)h(\varphi) = i(v)(\omega^{i_1} \wedge ... \wedge \omega^{i_s}) = \begin{cases} t\omega^{i_2} \wedge ... \wedge \omega^{i_s}, \ \textit{dacă } i_1 = 1 \\ 0, \ \textit{dacă } i_1 \neq 1 \end{cases}$$

dedusă din definiţia (1.17) a produsului interior $i(v)$, rezultă (7.4).□

Analog, dacă $v \in \mathbf{R}^n$ şi $\varphi \in Cl_n$,

$$\varphi = e_{i_1}...e_{i_p}, 0 \leq i_1 < ... < i_p \leq n, p \in \{0, ..., n\}, \tag{7.6}$$

rezultă:

$$h(\varphi v) = (-1)^p[h(v) \wedge h(\varphi) + i(v)h(\varphi)] \tag{7.7}$$

Fie $h : Cl(M) \to \wedge M$ izomorfismul canonic indus între cele două fibrări vectoriale de către izomorfismul (7.3) al fibrelor lor standard. Avem următoarea:

Propoziţia 2. *Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp de repere ortonormat pe M. Oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$ se verifică egalitatea:*

$$h(\nabla_{e_i} e_j) = \nabla_{e_i} h(e_j). \tag{7.8}$$

Demonstraţie. Notăm $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k, (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$. Rezultă:

$$h(\nabla_{e_i} e_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \omega^k, \tag{7.9}$$

unde $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ este câmpul de corepere dual câmpului de repere considerat. Din faptul că ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricei varietăţii riemanniene M, avem $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$ oricare ar fi indicii $i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Utilizând (1.14) rezultă din (7.9) egalitatea cerută (7.8).□

Exerciţii.

1) Arătaţi că:

$$h(\nabla_X \varphi) = \nabla_X h(\varphi) \tag{7.10}$$

oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M)), X \in \mathcal{X}(M)$. *Indicaţie.* Este suficient de considerat $\varphi = f e_{i_1} ... e_{i_s}, f \in \mathcal{F}(M)$, unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortonoramat de repere pe M. Se utilizează (7.5), (7.8) şi proprietăţile conexiunii Levi-Civita..

Propoziţia 3. *Fie $h : Cl(M) \to \wedge M$ izomorfismul canonic. Considerăm varietatea M orientabilă. Avem atunci:*

$$h \circ D = (d + \delta) \circ h, \tag{7.11}$$

$$h \circ \widehat{D} = (-1)^p (d - \delta) \circ h, \tag{7.12}$$

$$h \circ D^2 = h \circ \widehat{D}^2 = \Delta \circ h, \tag{7.13}$$

unde d, δ, Δ sunt respectiv operatorii de diferenţiere, codiferenţiere şi laplacianul Hodge daţi respectiv prin formulele (1.18), (1.22) iar ambii membri ai formulei (7.12) se aplică unor secţiuni $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ de forma (7.6).

Mai mult,

$$D \circ \widehat{D} = \widehat{D} \circ D \tag{7.14}$$

Demonstraţie. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortonormal de repere definit local pe M.

Din (7.1), (7.4), 7.10 deducem oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$:

$$h(D\varphi) = \sum_{j=1}^{n} h(e_j) \wedge \nabla_{e_j} h(\varphi) - \sum_{j=1}^{n} i(e_j)\nabla_{e_j} h(\varphi).$$

Din (1.18), deducem atunci (7.11). Analog se obţine (7.12) folosind (7.7) în loc de (7.4).

Să considerăm acum $\varphi = e_{i_1}...e_{i_p}, 0 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$. Din (7.12) avem:

$$\begin{gathered} h \circ \widehat{D} \circ \widehat{D}\varphi = h \circ \widehat{D} \circ h^{-1}(h \circ \widehat{D}\varphi) = \\ = (-1)^p h \circ \widehat{D} \circ h^{-1}(d-\delta) \circ h = \\ (-1)^p[(-1)^{p+1}(d-\delta)d \circ h - (-1)^{p-1}(d-\delta)\delta \circ h = \Delta \circ h. \end{gathered}$$

Analog, se obţine:

$$h \circ D^2 = \Delta \circ h.$$

Deci egalitatea (7.13) este adevărată.

Pentru a demonstra egalitatea (7.14), folosim (7.11), (7.12). Deducem:

$$h \circ D \circ \widehat{D} = h \circ \widehat{D} \circ D$$

şi cum h induce un izomorfism între fibrele deasupra oricărui punct $x \in M$, corespunzătoare celor doua fibrări, deducem (7.14).□

Ca o consecinţă imediată a Propoziţiei 3, pe o varietate riemanniană orientabilă spaţiul formelor armonice şi spaţiile secţiunilor Dirac corespunzătoare respectiv operatorilor Dirac $D, \widehat{D}$ sunt izomorfe, adică:

$$\ker \Delta \simeq \ker D \simeq \ker \widehat{D}.$$

Propoziţia 4. *Fie operatorii Dirac*

$$D, \widehat{D} : \Gamma(Cl(M)) \to \Gamma(Cl(M)),$$

daţi respectiv prin formula (7.1), (7.2). Atunci se verifică egalităţile:

$$D^2\varphi = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi + \sum_{i<j} e_i e_j R_{e_i e_j}\varphi, \tag{7.15}$$

$$\widehat{D}^2\varphi = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi + \sum_{i<j}(R_{e_i e_j}\varphi)e_j e_i\varphi. \tag{7.16}$$

Demonstraţie. Operatorul Dirac D este invariant la schimbarea câmpului ortogonal de repere $\{e_1, ..., e_n\}$. Fie $x \in M$ un punct arbitrar fixat. Alegem $\{e_1, ..., e_n\}$ câmp de repere normal în x, deci $(\nabla_{e_i} e_j)(x) = 0, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}$.

Avem succesiv:

$$D^2\varphi = \sum_{i,j=1}^n e_i\nabla_{e_i}(e_j\nabla_{e_j}\varphi) =$$
$$\sum_{i,j=1}^n e_i(\nabla_{e_i}e_j)\nabla_{e_j}\varphi + \sum_{i,j=1}^n e_ie_j\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\varphi.$$

Atunci, *în punctul* x fixat, deducem:

$$D^2\varphi = \sum_{i,j=1}^n e_ie_j\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\varphi =$$
$$= -\sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi + \sum_{i<j} e_ie_j\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\varphi + \sum_{i>j} e_ie_j\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\varphi =$$
$$= -\sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi + \sum_{i<j} e_ie_j(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i})\varphi.$$

Din (5.30), se deduce că (7.15) este adevărată în punctul x fixat. Cum $x \in M$ este arbitrară, rezultă că (7.15) se verifică în orice punct din M. Analog se deduce egalitatea (7.16).□

Exerciţii

1) Arătaţi că au loc egalităţile:

$$D \circ \widehat{D}\varphi = \sum_{i,j=1}^n e_i(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\varphi)e_j, \tag{7.17}$$

$$\widehat{D} \circ D\varphi = \sum_{i,j=1}^n e_i(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\varphi)e_j. \tag{7.18}$$

Indicaţie. Se procedează ca în demonstraţia Propoziţiei 4.

Din formulele (7.13) - (7.18), deducem:

$$\sum_{i<j}[e_ie_j(R_{e_ie_j}\varphi) - (R_{e_ie_j}\varphi)e_je_i] = 0, \tag{7.19}$$

$$\sum_{i,j=1}^n e_i(R_{e_ie_j}\varphi)e_j = 0. \tag{7.20}$$

Din formula (7.19) se deduce succesiv, folosind croşetul din algebra Lie a unei algebre Clifford:

$$\begin{gathered}\sum_{i<j} e_ie_j(R_{e_ie_j}\varphi) = \sum_{i<j}(R_{e_ie_j}\varphi)e_je_i = \\ \frac{1}{2}\sum_{i<j}[e_ie_j, R_{e_ie_j}\varphi] = \frac{1}{2}\sum_{i<j} ad_{e_ie_j}(R_{e_ie_j}\varphi).\end{gathered} \tag{7.21}$$

Rezultate pe fibrarea Clifford

Unele dintre teoremele demonstrate anterior pot fi demonstrate acum utilizând formalismul Clifford. În capitolul 1, am definit transformarea Ricci pe o varietate Riemann M, prin formula (1.34).

Având în vedere izomorfismul canonic $TM \simeq \wedge^1 M$ vom considera de asemenea *forma de curbură Ricci* dată local prin formula:

$$\begin{aligned} Ric(\varphi, \psi) &= < Ric\varphi, \psi >, \\ Ric\varphi &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} R_{\varphi e_j} e_j, \end{aligned} \tag{7.22}$$

oricare ar fi 1-formele $\varphi, \psi \in \wedge^1 M$, unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortonormat de repere definit pe M.

Evident, forma de curbură Ricci este o formă biliniară simetrică.

O consecinţă imediată a identităţii lui Bochner (6.23) este obţinută mai jos, considerând cazul particular de fibrare Dirac, care este fibrarea Clifford $Cl(M)$.

Propoziţia 5. *Fie M varietate riemanniană orientabilă.*

Pe spaţiul 1- formelor $\wedge^1 M$ are loc egalitatea:

$$\Delta = \nabla^* \nabla + Ric. \tag{7.23}$$

Demonstraţie. Fie restricţia izomorfismului canonic $h : Cl(M) \to \wedge M$, la $TM \subset Cl(M)$ din care deducem izomorfismul canonic $TM \simeq \wedge^1 M$. Avem de asemenea, via acest izomorfism, $D^2 \simeq \Delta$, cum rezultă din formula (7.13). Formula (6.16) ne arată că operatorul $\nabla^* \nabla$ comută cu h, deoarece h comută cu ∇.

Folosind (6.22), calculăm oricare ar fi $\varphi \in TM \subset Cl(M)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\varphi = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j R_{e_i e_j} \varphi = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} < R_{e_i e_j} \varphi, e_k > e_i e_j e_k = \\ -\tfrac{1}{6} \textstyle\sum_{i,j,k \ dist.} [< R_{e_i e_j} e_k, \varphi > + < R_{e_j e_k} e_i, \varphi > + \\ + < R_{e_k e_i} e_j, \varphi >] e_i e_j e_k - \\ -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j} < R_{e_i e_j} \varphi, e_j > e_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} < R_{e_i e_j} \varphi, e_i > e_j. \end{aligned}$$

Suma multiplă de mai sus, după indicii $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ distincţi este nulă datorită identităţii lui Bianchi. Ca urmare:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\varphi &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} < R_{e_i e_j} \varphi, e_i > e_j = \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} < R_{\varphi e_i} e_i, e_j > e_j = Ric\varphi \end{aligned}$$

Identitatea lui Bochner (6.23) se scrie deci pe spaţiul $1-$ formelor $\wedge^1 M$ sub forma (7.23).□

Teorema 6 (a lui Bochner). *Fie M varietate riemanniană compactă (fară bord), orientabilă. Dacă forma de curbură Ric este strict pozitivă, atunci primul număr Betti, $b_1(M) = 0$. Concluzia se păstrează şi dacă $Ric \geq 0$, dar există un punct în care $Ric > 0$.*

Demonstraţie. Amintim că teorema Hodge afirmă că spaţiul $1-$ formelor armonice pe o varietate compactă M este izomorf cu grupul de coomologie de Rham $H^1(M; \mathbf{R})$, iar $b_1(M) = \dim H^1(M; \mathbf{R})$. Presupunem, prin absurd că $b_1(M) > 0$, deci există φ o $1-$ formă armonică nenulă. Din Propoziţia 5, deoarece $< Ric\varphi, \varphi >= Ric(\varphi, \varphi)$, deducem:

$$\int_M Ric(\varphi, \varphi) = -(\nabla^* \nabla \varphi, \varphi).$$

Din (6.20) rezultă:

$$\int_M Ric(\varphi,\varphi) = -\|\nabla\varphi\|^2. \tag{7.24}$$

Dacă $Ric > 0$, atunci şi $\int_M Ric(\varphi,\varphi) > 0$, iar egalitatea (7.24) nu poate fi adevărată. Contradicţia provine din presupunerea făcută. Deci, dacă $Ric > 0$, atunci $b_1(M) = 0$.

Dacă $Ric \geq 0$, egalitatea (7.24) implică $\|\nabla\varphi\|^2 = 0$, deci $\nabla\varphi = 0$, deci φ este paralelă.

Dacă $Ric \geq 0$ şi există $x \in M$ încât $Ric(x) > 0$, atunci $\varphi(x) = 0$. Dar φ este paralelă. Deducem atunci $\varphi = 0$.□

Observaţie. Se observă că teorema 6 este de fapt o alta formă de prezentare a teoremei 8 din cap. 1. S-a dat astfel, o demonstraţie nouă a acestei teoreme, utilizându-se formalismul Clifford.

Din formulele (7.21), (6.22) deducem următoarea expresie a operatorului de curbură pe fibrarea Clifford:

$$\mathcal{R}\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i<j}[e_ie_j, R_{e_ie_j}\varphi], \tag{7.25}$$

croşetul făcându-se în algebra Lie generată de $\{e_ie_j\}_{i<j}$.

Urmărim să demonstrăm şi teorema 10 (Gallot-Meyer) din cap. 1, în contextul în care ne-am situat în acest capitol.

Demonstrăm mai întâi:

Lema 7. *Fie*

$$R_{XY} : \Gamma(Cl(M)) \to \Gamma(Cl(M)), (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

*transformarea de curbură definită prin formula (*5.30).

Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este un câmp ortonormat de repere pe M, are loc formula:

$$R_{XY}\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i<j} < R_{XY}e_i, e_j > ad_{e_ie_j}\varphi, (\forall)\varphi \in \Gamma(Cl(M)). \tag{7.26}$$

Demonstraţie. Local, orice secţiune $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ se scrie:

$$\varphi = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_s\leq n \\ s=0,1,...,n}} a_{i_1...i_s}e_{i_1}...e_{i_s},$$

unde

$$a_{i_1...i_s}, 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s \in \{0, 1, ..., n\}$$

sunt funcţii diferenţiabile reale, definite local pe M.

Formula (7.26) fiind $\mathcal{F}(M)-$ liniară, este suficient să o demonstrăm pentru

$$\varphi = e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_s}, 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n, s = 0, 1, ..., n.$$

Dacă $s = 0$, atunci $\varphi \in \mathcal{F}(M)$, deci $R_{XY}\varphi = 0$ şi $ad_{e_ie_j}\varphi = 0, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}, i < j$, deci formula (7.26) este adevărată.

Dacă $s = 1$, alegând $\varphi = e_p, p \in \{1, ..., n\}$, avem:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j} < R_{XY}e_i, e_j > [e_ie_j, e_p] = \\ = \tfrac{1}{2}\{\textstyle\sum_{p<j} < R_{XY}e_p, e_j > [e_pe_j, e_p] + \sum_{i<p} < R_{XY}e_i, e_p > [e_ie_p, e_p] + \\ + \sum_{\substack{i<j \\ p\notin\{i,j\}}} < R_{XY}e_i, e_j > [e_ie_j, e_p]\} = \\ = \textstyle\sum_{p<j} < R_{XY}e_p, e_j > e_j - \sum_{j<p} < R_{XY}e_j, e_p > e_j = \\ = \textstyle\sum_j < R_{XY}e_p, e_j > e_j = R_{XY}e_p.\end{gathered}$$

Deci, formula (7.26) este adevărată pentru $s = 1$.

Procedăm acum prin inducţie după s. Presupunem că egalitatea (7.26) este adevărată pentru orice secţiune $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ de forma:

$$\begin{gathered}\varphi = e_{i_1}...e_{i_s}, 1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n \\ s \in \{1, ..., n-1\}\end{gathered}$$

şi o demonstrăm pentru φe_r. Dacă $i_s < r \leq n$, avem folosind ipoteza de inducţie şi formula (5.32):

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j} < R_{XY}e_i, e_j > [e_ie_j, \varphi e_r] = \\ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j} < R_{XY}e_i, e_j > (e_ie_j\varphi e_r - \varphi e_re_ie_j) = \\ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i<j} < R_{XY}e_i, e_j > [(ad_{e_ie_j}\varphi)e_r + \varphi(ad_{e_ie_j}e_r)] = \\ = (R_{XY}\varphi)e_r + \varphi(R_{XY}e_r) = R_{XY}(\varphi e_r).\end{gathered}$$

Deci formula (7.26) este adevărată pentru $i_s < r$. Analog, când $r < i_s$. Dacă $r \in \{i_1, ..., i_s\}$, formula este adevarată din ipoteza de inducţie.□

Lema 8. *Fie* $\varphi \in \wedge^p\mathbf{R}^n \subset Cl_n, 1 \leq p \leq n-1$, *încât* $ad_\xi\varphi = 0, (\forall)\xi \in \wedge^2\mathbf{R}^n$. *Atunci* $\varphi = 0$.

Demonstraţie. Incluziunea $\wedge^p\mathbf{R}^n \subset Cl_n$ este dată de izomorfismul de spaţii vectoriale $\wedge\mathbf{R}^n \simeq Cl_n$ definit prin formula (3.10). Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ baza canonică din $\mathbf{R}^n$ şi

$$\varphi = \sum_{|I|=p} a_Ie_I,$$

unde

$$I = \{i_1, ..., i_p\}, 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$$

este un milti-indice şi am notat cu $\mid I \mid$ cardinalul mulţimii $\{i_1, ..., i_p\}$, iar $e_I = e_{i_1}...e_{i_p}$, $a_I = a_{i_1...i_p} \in \mathbf{R}$.

Din ipoteză avem $[e_ie_j, \varphi] = 0, (\forall)i, j \in \{1, ..., n\}, i < j$. Dar:

$$[e_ie_j, e_I] = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i, j \in I \text{ sau } i, j \notin I \\ 2e_ie_je_I \text{ în celelalte cazuri.}\end{cases}$$

Ca urmare, ipoteza în care ne-am situat implică $a_I = 0$, dacă $i \in I$ sau $j \in I$ fără ca mulţimea $\{i, j\}$ să fie inclusă în I.

Oricare ar fi multi-indicele I_0 cu $\mid I_0 \mid = p$, există $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ cu proprietatea că $i_0 \notin I_0, j_0 \in I_0$ deoarece, în caz contrar:

- sau oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$ ar rezulta $i, j \in I_0$, ceeace ar implica $I_0 = \{1, ..., n\}$.

Această concluzie este falsă deoarece $\mid I_0 \mid = p \neq n$.

- sau oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$ ar rezulta $i, j \notin I_0$ ceeace ar implica $I_0 = \Phi$.

Această concluzie este falsă deoarece $\mid I_0 \mid = p \neq 0$.

Ca urmare, există indicii $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$, cu proprietatea că $i_0 \notin I_0, j_0 \in I_0$. Atunci condiţia $[e_{i_0} e_{j_0}, \varphi] = 0$ implică $a_{I_0} = 0$. Ca urmare, oricare ar fi multi-indicele I cu $\mid I \mid = p$ avem $a_I = 0$, deci $\varphi = 0$.□

Teorema 9. (Gallot-Meyer) *Fie M varietate riemanniană, compactă (fără bord), orientabilă. Presupunem că operatorul de curbură al varietăţii M este strict pozitiv definit în orice punct. Atunci toate numerele Betti $b_p(M)$ sunt nule pentru $p \in \{1, ..., n-1\}, n = \dim M$. Aceeaşi concluzie este valabilă în ipoteza că operatorul de curbură este nenegativ definit, dar este strict pozitiv definit într-un punct.*

Demonstraţie. Vrem să arătăm că ipoteza că operatorul de curbură al varietăţii M este strict pozitiv, implică $< \mathcal{R}(\varphi), \varphi >> 0$, oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$. Conform formulelor (5.29), (7.25), (7.26), deducem, oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$:

$$< \mathcal{R}\varphi, \varphi >= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i<j} < R_{e_i e_j}\varphi, ad_{e_i e_j}\varphi >=$$
$$= -\tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i<j} \sum_{k<l} < R_{e_i e_j} e_k, e_l >< ad_{e_k e_l}\varphi, ad_{e_i e_j}\varphi >$$

Din formulele (1.49), (1.53), (1.54) deducem mai departe:

$$< \mathcal{R}\varphi, \varphi >= -\tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i<j} \sum_{k<l} Q(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) < ad_{e_k e_l}\varphi, ad_{e_i e_j}\varphi >=$$
$$= -\tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i<j} \sum_{k<l} < \mathcal{R}_{e_i \wedge e_j}, e_k \wedge e_l >< ad_{e_k e_l}\varphi, ad_{e_i e_j}\varphi > :$$

Câmpul de repere $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ este ortonormat în raport cu produsul scalar $<,>$ definit pe spa ţiul $\wedge^2 M$, al 2- formelor lui M, prin formula (1.46). Se observă însă că expresia $< \mathcal{R}\varphi, \varphi >$ nu depinde de câmpul ortonormat de repere $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ ceea ce ne permite să alegem, fără a restrânge generalitatea rezultatelor, un câmp ortonormat de repere convenabil în acest moment. Formula (1.52) ne arată că $\mathcal{R}$ este endomorfism simetric în raport cu produsul scalar $<,>$, deci există pe $\wedge^2 M$ un câmp ortonormat de repere $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1,...,N}, N = \dim \wedge^2 M = n(n-1)/2$, format din vectori proprii ai lui $\mathcal{R}$. Oricare ar fi $\alpha \in \{1, ..., N\}$, fie λ'_α valoarea proprie (evident, reală) corespunzătoare vectorului propriu ξ_α şi $\lambda_\alpha = -\frac{1}{4}\lambda'_\alpha$. Ca urmare:

$$< \mathcal{R}\varphi, \varphi >= -\tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} < \mathcal{R}_{\xi_\alpha}, \xi_\beta >< ad_{\xi_\alpha}\varphi, ad_{\xi_\beta}\varphi >= \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha \parallel ad_{\xi_\alpha}\varphi \parallel^2 . \tag{7.27}$$

Din ipoteză, $\lambda_\alpha > 0, (\forall)\alpha \in \{1, ..., N\}$, deci $< \mathcal{R}\varphi, \varphi >> 0$. Din formula lui Bochner (6.23), rezultă:

$$\int_M < \nabla\varphi, \nabla\varphi > + \int_M < \mathcal{R}\varphi, \varphi >= 0.$$

Deducem din (7.27) că:

$$ad_{\xi_\alpha}\varphi = 0, (\forall)\alpha \in \{1, ..., N\}.$$

Din lema 8, deducem că oricare ar fi $\varphi \in \wedge^p M, p \in \{1, ..., n-1\}, n = \dim M$, avem $\varphi = 0$, deci numărul Betti $b_p(M) = 0$. Partea a doua a concluziei rezultă din faptul că $\nabla\varphi = 0$ dacă operatorul de curbură este nenegativ, iar $\varphi(x) = 0$ antrenează $\varphi = 0$.□

8

Structuri spinoriale

Preliminarii

Examinăm în acest capitol o nouă fibrare Dirac ce va fi construită în anumite condiţii de ordin topologic impuse varietăţii de bază.

Amintim că grupul Clifford Cl_n^*, care este grupul elementelor inversabile din algebra Clifford Cl_n, are o structură de grup Lie [30]. Algebra Lie a grupului Cl_n^* coincide ca mulţime cu Cl_n, structura de algebră Lie fiind dată de croşetul:

$$[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi, (\forall)\varphi, \psi \in Cl_n.$$

Am definit în cazul general, prin formula (3.14), un subgrup important al grupului Clifford. Avem:

$$Spin_n = \{g = x_1...x_h \mid x_1, ..., x_h \in \mathbf{R}^n, \| x_i \|= 1, i = 1, ..., h, h - par\}. \tag{8.1}$$

Grupul $Spin_n$ este subgrup compact al grupului Lie Cl_n^*.

Există reprezentarea liniară $p : Spin_n \to SO(n)$ definită astfel: oricare ar fi elementul $g \in Spin_n, g = x_1...x_h, x_1, ..., x_h \in \mathbf{R}^n, \| x_i \|= 1, i = 1, ..., h, h - par$, avem

$$p(g) = s_{x_1} \circ ... \circ s_{x_h} \tag{8.2}$$

unde $s_x : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este simetria faţă de hiperplanul orogonal vectorului $x \in \mathbf{R}^n, (\forall)x \in \mathbf{R}^n$. Amintim că reprezentarea liniară $p : Spin_n \to SO(n)$ este surjectivă şi $\ker p \simeq \mathbf{Z}_2$.

Echivalent, oricare ar fi $g \in Spin_n$, avem $p(g) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$,

$$p(g)(x) = gxg^{-1}, (\forall)x \in \mathbf{R}^n. \tag{8.3}$$

Propoziţia 1. *Algebra Lie $spin_n$ a grupului Lie $Spin_n$ este subalgebra Lie a algebrei Lie $(Cl_n, [,])$ generată de $\{e_ie_j\}_{i<j}$, unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este un reper ortonormat din $\mathbf{R}^n$.*

Demonstraţie. Este de observat că $Sp\{e_ie_j\}_{i<j}$ nu depinde de alegerea reperului ortonormat $\{e_1, ..., e_n\}$. Utilizăm definiţia algebrei Lie a unui grup Lie, ca spaţiu tangent în elementul neutru al grupului. Oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}, i < j$, considerăm drumul:

$$\gamma_{ij} : (-\epsilon, \epsilon) \to Spin_n, \epsilon > 0, \gamma_{ij}(t) = \cos t + e_ie_j \sin t \tag{8.4}$$

cu proprietatea că $\gamma_{ij}(0) = 1$. Evident $\gamma_{ij}(t) \in Spin_n$ oricare ar fi $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, deoarece putem scrie:

$$\gamma_{ij}(t) = \cos t + e_ie_j \sin t =$$
$$= (e_i \cos \tfrac{t}{2} + e_j \sin \tfrac{t}{2})(-e_i \cos \tfrac{t}{2} + e_j \sin \tfrac{t}{2}).$$

Atunci $\frac{d}{dt} |_{t=0} \gamma_{ij} = e_ie_j \in T_1Spin_n$. Pe de altă parte, grupul Lie $Spin_n$ are dimensiunea grupului Lie $SO(n)$ deoarece există reprezentarea liniară surjectivă $p : Spin_n \to SO(n)$ cu nucleul izomorf cu $\mathbf{Z}_2$, dată prin formula (8.2). Avem deci, $\dim Spin_n = \frac{n(n-1)}{2} = card\{e_ie_j\}_{i<j}$, ceeace implică $Sp\{e_ie_j\}_{i<j} = spin_n$.□

Algebra Lie $so(n)$ a grupului special ortogonal este algebra Lie a aplicaţiilor liniare antisimetrice de urmă nulă ale spaţiului vectorial $\mathbf{R}^n$. Ea este generată de mulţimea $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ a aplicaţiilor liniare antisimetrice definite astfel. Oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}, i < j$, definim $e_i \wedge e_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, prin formula:

$$(e_i \wedge e_j)(x) =< e_i, x > e_j - < e_j, x > e_i, (\forall)x \in \mathbf{R}^n. \tag{8.5}$$

Mai general, oricare ar fi vectorii $u, v \in \mathbf{R}^n$, definim aplicaţia liniară antisimetrică $u \wedge v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, prin formula:

$$(u \wedge v)(x) =< u, x > v - < v, x > u, (\forall)x \in \mathbf{R}^n. \tag{8.6}$$

Este interesant de observat că matricea asociată aplicaţiei liniare $e_i \wedge e_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $i < j$, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^n$, are toate elementele nule cu excepţia elementelor indexate (i, j), respectiv (j, i), care sunt egale cu -1, respectiv 1.

Algebrele Lie $spin_n$ şi $so(n)$ sunt izomorfe. Un izomorfism al celor două algebre este pus în evidenţă de:

Propoziţia 2. *Avem izomorfosmul de algebre Lie $p_* : spin_n \to so(n)$ unde am notat p_* diferenţiala în 1 a aplicaţiei diferenţiabile $p : Spin_n \to SO(n)$ dată prin formula 8.3. În plus,*

$$p_*(e_ie_j) = 2e_i \wedge e_j, (\forall)i,j \in \{1,...,n\}, i < j. \tag{8.7}$$

Demonstraţie. Reprezentarea $p : Spin_n \to SO(n)$ fiind surjectivă, cu nucleul izomorf cu $\mathbf{Z}_2$, rezultă că $p_* : spin_n \to so(n)$ este izomorfism de algebre Lie.

Pentru a demonstra formula (8.7) să considerăm drumul (8.4), oricare ar fi indicii $i,j \in \{1,...,n\}, i < j$. Deoarece $\gamma_{ij}(0) = 1$ şi $\frac{d}{dt}|_{t=0} \gamma_{ij} = e_ie_j$, deducem:

$$p_*(e_ie_j) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, p(\gamma_{ij}(t)).$$

Din (8.3) obţinem:

$$p(\gamma_{ij}(t))(x) = \gamma_{ij}(t)x\gamma_{ij}(t)^{-1},$$

oricare ar fi vectorul $x \in \mathbf{R}^n, t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Vom utiliza următoarea proprietate a algebrei Clifford Cl_n :

$$xy + yx = -2 < x,y > .1, (\forall)x,y \in \mathbf{R}^n \tag{8.8}$$

(vezi proprietatea (3.8)).

Oricare ar fi $x \in \mathbf{R}^n$ deducem, având în vedere (8.8), (8.5) :

$$\begin{aligned} p_*(e_ie_j)(x) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\, (\gamma_{ij}(t)x\gamma_{ij}(t)^{-1}) = e_ie_jx - xe_ie_j = \\ &= e_ie_jx + e_ixe_j + 2 < x, e_i > e_j = \\ &= e_ie_jx - e_ie_jx - 2 < x, e_j > e_i + 2 < x, e_i > e_j = \\ &= 2(e_i \wedge e_j)(x). \square \end{aligned}$$

Rezultă imediat formula:

$$p_*^{-1}(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{4}[e_i, e_j], (\forall)i,j \in \{1,...,n\}, i < j. \tag{8.9}$$

Mai general, oricare ar fi $u, v \in \mathbf{R}^n$ avem:

$$p_*^{-1}(u \wedge v) = \frac{1}{4}[u,v]. \tag{8.10}$$

Presupunem acum că spaţiul vectorial W peste corpul $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este un Cl_n-modul; există deci reprezentarea

$$\mu : Cl_n \to Hom_K(W,W), K = \mathbf{R}, \mathbf{C}.$$

Amintim că oricare ar fi elementele $g \in Cl_n, u \in W$, am notat $\mu(g)u = g.u$ şi am numit $g.u$ *multiplicare Clifford.*

Menţinem aceste notaţii şi în enunţul ce urmează:

Propoziţia 3. *Fie W un Cl_n-modul real şi*

$$\Delta : Spin_n \to SO(W), \Delta = \mu\, |_{Spin_n} .$$

Notăm $\Delta_* \circ p_*^{-1} = \Delta' : so(n) \to so(W)$, *unde* $so(W)$ *este algebra Lie a grupului special ortogonal al spaţiului vectorial* W *dotat cu produsul scalar cu proprietatea că oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}^n, \| x \| = 1$, *rezultă că* $\mu(x) \in O(W)$ *(produs scalar ce există conform Propoziţiei 13 din 3.4). Atunci are loc formula:*

$$\Delta'(v \wedge w) = \frac{1}{4}[v, w].$$

oricare ar fi $v \wedge w \in so(n)$, *unde* "." *este multiplicarea Clifford.*

Demonstraţie. Grupul $Spin_n$ fiind dat de (8.1), deducem că oricare ar fi $g \in Spin_n$, $\mu(g) \in O(W)$, deci $\mu(Spin_n) \subseteq O(W)$. Cum $Spin_n$ este conex, prin reprezentarea μ va fi dus în componenta conexă a unităţii grupului ortogonal $O(W)$, deci în $SO(W)$.

Oricare ar fi $v \wedge w \in so(n)$, avem din (8.10):

$$\Delta'(v \wedge w) = \Delta_* \circ p_*^{-1}(v \wedge w) = \frac{1}{4}[v, w]. \square$$

Definiţia structurii spinoriale

Am studiat în cap. 5 fibrarea Dirac $Cl(M)$ având fibrele algebre Clifford izomorfe cu $Cl_n, n = \dim M$. Vom generaliza această noţiune considerând o fibrare Dirac de bază varietatea diferenţiabilă M, având drept fibre spaţii vectoriale izomorfe cu un Cl_n- modul *ireductibil*. Acest lucru nu este posibil decât în anumite condiţii de ordin topologic impuse varietăţii de bază M.

Definiţie. Fie M o varietate riemanniană, orientabilă, de dimensiune n. Spunem că M este *varietate spinorială cu structura spinorială* $f : \Sigma \to SO(M)$ dacă

$$f : \Sigma(M, Spin_n) \to SO(M)$$

este un morfism de fibrări principale ce se proiectează pe aplicaţia identică a lui M şi corespunde morfismului de grupuri Lie

$$p : Spin_n \to SO(n),$$

unde $\Sigma(M, Spin_n)$ este o fibrare principală de bază M şi grup structural $Spin_n$, iar $SO(M)$ este fibrarea principală a reperelor special ortogonale a lui M.

Observaţii.

Dacă M este varietate spinorială, cu structura spinorială

$$f : \Sigma \to SO(M),$$

deducem că $f : \Sigma \to SO(M)$ este o aplicaţie diferenţiabilă între spaţiile totale ale celor două fibrări principale $\Sigma(M, Spin_n)$ şi $SO(M)$ şi, în plus, :

a) Diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & SO(M) \\ \pi_\Sigma \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

este comutativă, unde π_Σ, π sunt respectiv proiecţiile fibrărilor principale $\Sigma(M, Spin_n)$, respectiv $SO(M)$;

b) Oricare ar fi $g \in Spin_n, \sigma \in \Sigma$ se verifică egalitatea:

$$f(\sigma g) = f(\sigma)p(g),$$

unde $(\sigma, g) \in \Sigma \times Spin_n \to \sigma g \in \Sigma$ este acţiunea diferenţiabilă a grupului Lie $Spin_n$ pe varietatea diferenţiabilă Σ, iar $f(\sigma)p(g)$ este reperul din $SO(M)$ obţinut din reperul $f(\sigma) \in SO(M)$ prin acţiunea transformării special ortogonale $p(g) \in SO(n)$.

Noţiunea de structură spinorială a fost generalizată în mod natural, încă din anii '70, înlocuindu-se reprezentarea $p : Spin \to SO(n)$ cu reprezentarea adjunctă a unui grup unitar arbitrar. Generalizarea a fost făcută de I. Popovici în colaborare cu autoarea [26], [25], [28], [29]. Sunt generalizate de asemenea obiectele geometrice corespunzătoare: spinori, conexiuni spinoriale, dervata covariantă, etc.

Acum vom face câteva observaţii de natură topologică.

Este bine cunoscut [21], [20] că varietatea riemanniană M fiind orientabilă, prima sa clasă caracteristică Stiefel-Whitney $w_1(M)$ este nulă.

Un rezultat de bază privind existenţa structurilor spinoriale este expus mai jos.

Varietatea riemanniană, orientabilă M admite o structură spinorială dacă şi numai dacă a doua clasă caracteristică Stiefel-Whitney $w_2(M)$ este nulă. În acest caz, există pe M atâtea structuri spinoriale distincte (neizomorfe) câte elemente are primul grup de coomologie Cech cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_2$, notat $H^1(M; \mathbf{Z}_2)$.

Exemple de varietăţi spinoriale sunt: spaţiul proiectiv real $P_n(\mathbf{R})$ dacă şi numai dacă $n \equiv 3(mod 4)$, spaţiul proiectiv complex $P_n(\mathbf{C})$ dacă şi numai dacă n este impar, spaţiul proiectiv quternionic $P_n(\mathbf{H})$ oricare ar fi n.

Varietatea diferenţiabilă $SO(n)$ posedă două structuri spinoriale ce se construiesc respectiv cu ajutorul fibrărilor principale de spaţii totale:

$$\Sigma_1 = SO(n) \times Spin_N,$$
$$\Sigma_2 = Spin_n \times Spin_N / \mathbf{Z}_2,$$

unde $N = n(n-1)/2$, iar $\mathbf{Z}_2$ acţionează pe $Spin_n \times Spin_N$ după formula $(g,h) \to (-g,-h)$. Fibrarea reperelor special ortonormate a lui $SO(n)$ se identifică cu $SO(n) \times SO(N)$ fiind trivială. Avem deci următoarele două structuri spinoriale pe $SO(n)$:

$$\Sigma_1 \xrightarrow{f_1} SO(n) \times SO(N), f_1(a,g) = (a, p(g)),$$
$$\Sigma_2 \xrightarrow{f_2} SO(n) \times SO(N), f_2(g,h) = (p(g), p(h)).$$

Definiţie. Fie M o varietate spinorială $n-$ dimensională şi

$$f : \Sigma \to SO(M) \tag{8.11}$$

o structură spinorială a sa.

Fie W un Cl_n-modul real şi $\mu : Spin_n \to SO(W)$ reprezentarea indusă de morfismul de algebre $Cl_n \to Hom_{\mathbf{R}}(W,W)$ ce face ca spaţiul vectorial real W să fie Cl_n-modul (se consideră spaţiul vectorial real W dotat cu produsul scalar cu proprietatea din Propoziţia 3 din 3.2).

Fibrarea vectorială $S(M)$ asociată fibrării principale

$$\Sigma = \Sigma(M, Spin_n), \tag{8.12}$$

cu fibra tip spaţiul vectorial real W, pe care grupul Lie $Spin_n$ acţionează prin intermediul reprezentării induse

$$\mu : Spin_n \to SO(W), \tag{8.13}$$

se numeşte *fibrare spinorială reală* a varietăţii M. Scriem simbolic:

$$S(M) = \Sigma(M, Spin_n) \times_\mu W. \tag{8.14}$$

Analog, o *fibrare spinorială complexă* a varietăţii M este o fibrare vectorială asociată fibrării principale $\Sigma = \Sigma(M, Spin_n)$ cu fibra tip spaţiul vectorial complex W, pe care grupul $Spin_n$ acţionează prin intermediul reprezentării complexe

$$\mu : Spin_n \to GL_{\mathbf{C}}(W), \tag{8.15}$$

dată de restricţia la $Spin_n \subset Cl_n \subset Cl_n^{\mathbf{C}}$ a unei reprezentări $\mu : Cl_n^{\mathbf{C}} \to Hom_{\mathbf{C}}(W,W)$. Se scrie simbolic:

$$S_{\mathbf{C}}(M) = \Sigma(M, Spin_n) \times_\mu W. \tag{8.16}$$

În cele ce urmează dăm un exemplu de structură spinorială pe varietatea $M = \mathbf{R}^2$, preluat din [6]. Fie $P = P(M, SO(2))$ fibrarea reperelor ortonormate pozitiv orientate (adică de aceeaşi orientare cu reperul canonic al lui $\mathbf{R}^2$). Fie $\{e_1, e_2\}$ baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^2$. Este imediat că

$$Spin_2 = \{\pm[(\cos\varphi)1 - (\sin\varphi)e_1e_2] \mid \varphi \in [-\pi, \pi)\},$$

iar reprezentarea $p : Spin_2 \to SO(2)$ este dată prin formula:

$$p(g) = r_{-2\varphi}, (\forall) g = \pm[(\cos\varphi)1 + (\sin\varphi)e_1e_2] \in Spin_2,$$

unde $r_{-2\varphi} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ este rotaţia de unghi (-2φ).

Fie acum varietatea diferenţiabilă $\Sigma = \mathbf{R}^2 \times S^1$, unde $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ este cercul unitate. Definim o acţiune a grupului Lie $Spin_2$ pe $\Sigma = \mathbf{R}^2 \times S^1$ astfel: oricare ar fi

$$\begin{gathered} z_1 = (\rho_1 \cos\alpha_1, \rho_1 \sin\alpha_1) \in \mathbf{R}^2, \\ z_2 = (\cos\alpha_2, \sin\alpha_2) \in S^1, \\ g = -(\cos\varphi)1 + (\sin\varphi)e_1e_2 \in Spin_2, \end{gathered}$$

avem

$$(z_1, z_2)g =^{def} (z_1', z_2')$$

unde

$$\begin{gathered} z_1' = (\rho_1 \cos(\alpha_1 - \varphi), \rho_1 \sin(\alpha_1 - \varphi)), \\ z_2' = (\cos(\alpha_2 - \varphi), \sin(\alpha_2 - \varphi)). \end{gathered}$$

Rezultă $\Sigma = \Sigma(M, Spin_2)$ fibrare principală de bază M, grup structural $Spin_2$ şi proiecţia $\pi : \Sigma \to M$ dată de formula:

$$\pi(z_1, z_2) = (\rho_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \rho_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$

Cu notaţiile anterioare, fie $f : \Sigma \to P$ aplicaţia dată de formula:

$$f(z_1, z_2) = (x, X),$$

unde

$$x = (\rho_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \rho_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)),$$

iar $X = \{f_1, f_2\}$ este reperul din $\mathbf{R}^2$ ce se obţine din reperul canonic cu rotaţia de unghi $\alpha_1 + \alpha_2$. Se arată imediat că $f : \Sigma \to P$ este o structură spinorială pe $M = \mathbf{R}^2$.

Conexiuni spinoriale

Fie $S = S(M)$ fibrarea spinorială (8.14) asociată fibrării principale (8.12), unde (8.11) este o structură spinorială pe M. Fie $Cl(M)$ fibrarea Clifford a varietăţii riemanniene, orientabile, $n-$ dimensionale date (M, g). Avem $Cl(M) = SO(M) \times_{SO(n)} Cl_n$.

Se remarcă faptul că fibra tip a fibrării vectoriale $S(M)$ este spaţiul vectorial real W, în timp ce fibra tip a fibrării algebrice $Cl(M)$ este algebra Clifford Cl_n. Faptul că W este Cl_n-modul implică proprietatea fibrei lui $S = S(M)$ deasupra oricărui punct $x \in M$ de a fi spaţiu de reprezentare pentru $Cl(g_x)$ care este fibra deasupra lui x a lui $Cl(M)$. Cu alte cuvinte, dacă π_S este proiecţia fibrării S, există pentru orice $x \in M$ un morfism de algebre:

$$Cl(g_x) \to Hom_{\mathbf{R}}(\pi_S^{-1}(x), \pi_S^{-1}(x))$$

indus de reprezentarea $Cl_n \to Hom_{\mathbf{R}}(W, W)$ ce face ca W să fie Cl_n-modul.

Fie acum ω forma de conexiune a conexiunii Levi-Civita ∇ a varietăţii riemanniene orientabile (M, g).

Se ştie că ω este $1-$forma de conexiune a unei conexiuni din fibrarea principală $SO(M)$ a reperelor special ortogonale a lui M. Ca urmare, ea este definită pe $SO(M)$ cu valori în algebra Lie $so(n)$. Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^n$, atunci putem scrie:

$$\omega = -\sum_{i<j} \omega_j^i e_i \wedge e_j, \tag{8.17}$$

iar $(\omega_j^i)_{i,j}$ este o matrice de $1-$ forme cu proprietatea $\omega_j^i = -\omega_i^j$ oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Forma de curbură Ω a conexiunii Levi-Civita ∇ este o $2-$ formă definită pe $SO(M)$, cu valori în $so(n)$. Ea se scrie sub forma:

$$\Omega = -\sum_{i<j} \Omega_j^i e_i \wedge e_j. \tag{8.18}$$

Fie acum U o vecinătate de trivializare locală a fibrării principale $SO(M)$ şi $\{V_1, ..., V_n\}$ un câmp ortonormat de repere definit local pe U. Atunci $1-$forma de conexiune ω respectiv $2-$ forma de curbură Ω se proiectează respectiv pe $1-$ forma ω_U şi $2-$forma Ω_U, ambele definite pe U cu valori în algebra Lie $so(n)$, exprimate respectiv prin formulele:

$$\omega_U = -\sum_{\substack{i<j \\ k}} (\Gamma_{kj}^i \theta^k) e_i \wedge e_j, \tag{8.19}$$

$$\Omega_U = -\sum_{\substack{i<j \\ p<q}} (R_{pij}^q \theta^i \wedge \theta^j) e_q \wedge e_p, \tag{8.20}$$

unde $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ este câmpul de corepere dual câmpului de repere considerat şi am notat, ca de obicei, oricare ar fi indicii $i, j, p, q \in \{1, ..., n\}$:

$$\nabla_{V_i} V_j = \Gamma_{ij}^k V_k$$

$$R_{V_iV_j}V_p = R^q_{pij}V_q$$

$$R_{V_iV_j}V_p = \nabla_{V_i}\nabla_{V_j}V_p - \nabla_{V_j}\nabla_{V_i}V_p - \nabla_{[V_i,V_j]}V_p.$$

Avem acum în vedere teorema 5, din cap. 4, formula (4.15). Conexiunea Levi-Civita ∇ a metricii g induce pe fibrarea principală $\Sigma = \Sigma(M, Spin_n)$ o conexiune ∇' a cărei 1– formă de conexiune ω' verifică condiţia:

$$\omega' = p_*^{-1}f^*\omega.$$

Fie Ω' forma de curbură a conexiunii ∇'. Din (8.7) deducem, folosind (8.17), respectiv (8.18):

$$\omega' = -\frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega^i_j e_i e_j, \tag{8.21}$$

$$\Omega' = -\frac{1}{2}\sum_{i<j}\Omega^i_j e_i e_j. \tag{8.22}$$

Deoarece între fibrările principale $\Sigma = \Sigma(M, Spin_n)$ şi $SO(M)$ există morfismul de fibrări (8.11), putem alege deschisul $U \subseteq M$ încât el să fie vecinătate de trivializare locală pentru ambele fibrări. Formele ω' şi Ω' se vor proiecta atunci pe 1– forma ω'_U respectiv 2– forma Ω'_U, ambele definite pe U cu valori în algebra Lie $spin_n$. Avem din (8.21), (8.22) utilizând respectiv formulele (8.19), (8.20):

$$\omega'_U = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k}}(\Gamma^i_{kj}\theta^k)e_i e_j. \tag{8.23}$$

$$\Omega'_U = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k<l}}(R^k_{lij}\theta^i\wedge\theta^j)e_k e_l. \tag{8.24}$$

Notând ca de obicei metrica varietăţii M cu $<,>$, deducem:

$$\Omega'_U = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k<l}}(< R_{V_iV_j}V_l, V_k > \theta^i\wedge\theta^j)e_k e_l. \tag{8.25}$$

sau:

$$\Omega'_U(V_i, V_j) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k<l}} < R_{V_iV_j}V_k, V_l > e_k e_l, \tag{8.26}$$

formulă de mare interes pentru ceea ce urmează.

Conexiunea ∇' a fibrării principale $\Sigma = \Sigma(M, Spin_n)$, cu forma de conexiune ω', induce pe secţiunile fibrării spinoriale $S = S(M)$ o derivare covariantă ∇^S. Vom spune că ∇^S este o *conexiune spinorială*.

Oricare ar fi secţiunea $\sigma \in \Gamma(S(M))$ şi câmpul de vectori $X \in \mathcal{X}(M)$, ţinând cont de teoria generală expusă în 4.6, şi în particular de formula (4.36), avem:

$$(\nabla^S_X \sigma)_U = \sigma_{U*}(X) + \mu_*(\omega'_U(X))\sigma_U, \tag{8.27}$$

unde am notat cu $\sigma_U, (\nabla^S_X\sigma)_U$ aplicaţia indusă de secţiunea σ, respectiv $\nabla^S_X\sigma$ pe U, cu valori în fibra tip W.

Pe de altă parte, oricare ar fi $\varphi \in \Gamma(Cl(M)), \sigma \in \Gamma(S)$ avem "multiplicarea Clifford"

$$(\varphi, \sigma) \to \varphi.\sigma$$

ce provine din faptul că oricare ar fi $x \in M$ avem $\varphi(x) \in Cl(g_x), \sigma(x) \in \pi_S^{-1}(x)$ şi $\pi_S^{-1}(x)$ este spaţiu de reprezentare pentru algebra Clifford $Cl(g_x)$.

Avem acum:

Propoziţia 4. *Orice fibrare spinorială este o fibrare Dirac.*

Demonstraţie. Vom considera (M, g) o varietate Riemann, orientabilă ce posedă o structură spinorială (8.11). Fie $S = S(M)$ o fibrare spinorială a lui M, dată prin formula (8.14). Vom arăta că $S(M)$ este o fibrare Dirac (pentru definiţia fibrării Dirac, vezi 6.1).

Fibra deasupra fiecărui punct $x \in M$ din fibrarea spinorială $S = S(M)$ este un un $Cl(g_x)-$ modul izomorf cu fibra tip W ce posedă un produs scalar care face ca (6.1) să fie verificată.

Oricare ar fi $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(S), \varphi \in \Gamma(Cl(M))$ vom nota respectiv cu $\sigma_U, \sigma_{1U}, \sigma_{2U}, \varphi_U$ aplicaţiile definite pe vecinătatea U cu valori în fibra tip corespunzătoare, induse respectiv de secţiunile $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \varphi$. Oricare ar fi $g \in Spin_n$, putem scrie:

$$\begin{aligned} \mu(g)\mu(\varphi)\sigma &= [\mu(g)\mu(\varphi)\mu(g^{-1})][\mu(g)\sigma] = \\ &= \mu(g\varphi g^{-1})[\mu(g)\sigma]. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Aplicaţia $Ad : Cl_n^* \to Aut(Cl_n), Ad(g) = g\varphi g^{-1}, (\forall)\varphi \in Cl_n$ este reprezentarea adjunctă a grupului Lie Cl_n^* (al elementelor inversabile din algebra Clifford Cl_n). Pe de altă parte, oricare ar fi $g \in Spin_n$ elementul $p(g)$ aparţine grupului $SO(n)$ şi avem

$$p(g)\varphi = Ad_g\varphi, (\forall)\varphi \in Cl_n. \tag{8.29}$$

Am notat $p(g)\varphi$ rezultatul acţiunii elementului $p(g) \in SO(n)$ asupra lui $\varphi \in Cl_n$, acţiune definită în 5.1, când am construit fibrarea $Cl(M)$. Egalitatea (8.29) se deduce astfel: dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este baza canonică din $\mathbf{R}^n$ fie elementul $\psi = e_{i_1}...e_{i_s} \in Cl_n, 1 \le i_1 < ... < i_s \le n$; avem

$$Ad_g\psi = g\psi g^{-1} = (ge_{i_1}g^{-1})(ge_{i_2}g^{-1})...(ge_{i_s}g^{-1}) =$$
$$= (p(g)e_{i_1})(p(g)e_{i_2})...(p(g)e_{i_s}) = p(g)\psi.$$

Cum φ este combinaţie liniară de elemente de forma lui ψ, se deduce (8.29).

În formulele următoare, atenţie la semnul "." care denotă "multiplicarea Clifford".

Fie acum un drum diferenţiabil $t \in (-\epsilon, \epsilon) \to g(t) \in Spin_n$ cu proprietatea $g(0) = 1$, $\frac{d}{dt}g(t) \mid_{t=0}= A$. Din (8.28) deducem diferenţiând:

$$\mu_*(A)(\varphi.\sigma) = [\mu_*(p_*(A)\varphi)].\sigma + \varphi.[\mu_*(A)\sigma]. \tag{8.30}$$

Formula (6.2) se verifică. În adevăr, aplicăm formula (8.27) pentru $\varphi.\sigma$ şi ţinem cont de (8.30) precum şi de formula Leibnitz care implică:

$$(\varphi.\sigma)_*(X) = \varphi.\sigma_*(X) + \varphi_*(X).\sigma,$$

oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$.

Formula (6.3) este de asemenea verificată.

Utilizând (8.27), obţinem:

$$< (\nabla^S_X\sigma_1)_U, \sigma_{2U} > + < \sigma_{1U}, (\nabla^S_X\sigma_2)_U >=$$
$$< \sigma_{1U*}(X), \sigma_{2U} > + < \sigma_{1U}, \sigma_{2U*}(X) >= X < \sigma_{1U}, \sigma_{2U} >$$

deoarece avem:

$$< \mu_*(\omega'_U(X))\sigma_{1U}, \sigma_{2U} > + < \mu_*(\omega'_U(X))\sigma_{2U}, \sigma_{1U} >= 0,$$

ca urmare a faptului că $\mu_*(\omega'_U(X)) \in so(W)$. □

Fie $R^S : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ operatorul de curbură al conexiunii spinoriale ∇^S. Avem deci, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M), \sigma \in \Gamma(S)$:

$$R^S_{XY}\sigma =^{def} (\nabla^S_X\nabla^S_Y - \nabla^S_Y\nabla^S_X - \nabla^S_{[X,Y]})\sigma.$$

Având în vedere (8.25), deducem formula locală:

$$R^S_{V_iV_j}\sigma = -\frac{1}{2}\sum_{k<l} < R_{V_iV_j}V_l, V_k > V_kV_l.\sigma, \tag{8.31}$$

oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}, \sigma \in \Gamma(S)$, unde $\{V_1, ..., V_n\}$ este un câmp ortonormat de repere, definit local pe M.

Fibrarea spinorială $S = S(M)$ depinde de metrica dată pe varietatea spinorială de bază M. Studiem în continuare formula de schimbare a derivatei covariante spinoriale ∇^S la o schimbare conformă a metricii varietăţii M [18]. Presupunem că $g, \tilde{g}$ sunt metrici Riemanniene pe varietatea spinorială M, echivalente conform. Există deci o funcţie diferenţiabilă h definită pe M, cu valori reale încât

$$\tilde{g} = (\exp 2h)g. \tag{8.32}$$

Vom nota în continuare cu M, respectiv $\widetilde{M}$, varietatea M dotată cu metrica g, respectiv $\tilde{g}$. Remarcăm că oricare ar fi $u = \{e_1, ..., e_n\}$ un reper ortonormat din $T_xM, x \in M$, rezultă $\tilde{u} = \{\widetilde{e_1}, ..., \widetilde{e_n}\}$ un reper ortonormat din $T_x\widetilde{M}$ unde $\tilde{e_j} = (\exp(-h))e_j, (\forall)j \in \{1, ..., n\}$. Rezultă aplicaţia $\psi : SO(M) \to SO(\widetilde{M})$ definită prin formula $\psi(u) = \tilde{u}, (\forall)u \in SO(M)$. Lăsăm ca exerciţiu verificarea afirmaţiei că aplicaţia ψ definită mai sus este *izomorfism de fibrări principale.*

Fie

$$f : \Sigma = \Sigma(M, Spin_n) \to SO(M)$$

respectiv

$$\tilde{f} : \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}(\widetilde{M}, Spin_n) \to SO(\widetilde{M})$$

o structură spinorială pe M respectiv $\widetilde{M}$ încât $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ sunt varietăţi topologic echivalente. Izomorfismul de fibrări principale $\psi : SO(M) \to SO(\widetilde{M})$, definit mai sus, induce izomorfismul de fibrări principale ψ' $:\Sigma \to \tilde{\Sigma}$ cu proprietatea că diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \psi' & \\ \Sigma & \to & \tilde{\Sigma} \\ f\downarrow & & \downarrow\tilde{f} \\ SO(M) & \to & SO(\widetilde{M}) \\ & \psi & \end{array}$$

este comutativă. Considerăm acum un Cl_n-modul W şi notăm cu μ multiplicarea Clifford corespunzătoare. Atunci putem construi fibrarea spinorială $S = S(M) = \Sigma(M, Spin_n)X_\mu W$ respectiv $\tilde{S} = \tilde{S}(\widetilde{M}) = \tilde{\Sigma}(\widetilde{M}, Spin_n)X_\mu W$. Izomorfismul de fibrări principale ψ' induce izometria $\psi_\mu : S \to \tilde{S}$.

Fibratele vectoriale tangente TM şi $T\widetilde{M}$ coincid. Fie $\nabla, \widetilde{\nabla}$ respectiv conexiunea Levi-Civita a metricii $g, \tilde{g}$. Oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se deduce imediat formula:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (Xh)Y + (Yh)X - g(X,Y)grad(h), \tag{8.33}$$

unde gradientul $grad(h)$ este luat în raport cu metrica g.

Fie $\omega, \tilde{\omega}$ respectiv 1- forma de conexiune a conexiunii $\nabla, \widetilde{\nabla}$. Considerăm $\{e_1, ..., e_n\}, \{\widetilde{e_1}, ..., \widetilde{e_n}\}$, câmpuri ortonormate de repere în raport cu metrica g, respectiv $\tilde{g}$, definite pe deschisul U al varietăţii M, cu proprietatea $\tilde{e}_j(x) = \psi(e_j(x)), (\forall)x \in U$. Formele Pfaff $\omega, \tilde{\omega}$ sunt definite pe U, respectiv prin formele Pfaff $\omega_U, \tilde{\omega}_U$, unde:

$$\omega_U = (\omega_i^j)_{ji}, \omega_i^j = g(\nabla e_i, e_j),$$
$$\widetilde{\omega}_U = (\widetilde{\omega}_i^j)_{ji}, \widetilde{\omega}_i^j = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j).$$

Oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$ rezultă din (8.33):

$$\widetilde{\omega}_i^j(X) = \omega_i^j(X) + (e_i h)g(X, e_j) - (e_j h)g(X, e_i). \tag{8.34}$$

Formula (8.34) implică oricare ar fi $\widetilde{\sigma} \in \Gamma(\widetilde{S}), \widetilde{\sigma} = \psi_\mu(\sigma), \sigma \in \Gamma(S)$, având în vedere formulele (8.23), (8.27):

$$\widetilde{\nabla}_X^{\widetilde{S}}\widetilde{\sigma} = \psi_\mu\{\nabla_X^S\sigma + \frac{1}{4}[grad(h)X - Xgrad(h)]\sigma\}. \tag{8.35}$$

Deoarece

$$grad(h)X + Xgrad(h) = -2g(grad(h), X),$$

deducem:

$$\widetilde{\nabla}_X^{\widetilde{S}} = \psi_\mu \circ \{\nabla_X^S - \frac{1}{2}Xgrad(h) - \frac{1}{2}g(grad(h), X)\} \circ \psi_\mu^{-1}. \tag{8.36}$$

Operatorul Atiyah-Singer

Folosim notaţiile anterioare, dacă nu se fac alte precizări.

Fie $S = S(M)$ o fibrare spinorială a varietăţii spinoriale M. Vom nota cu $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortogonal de repere definit local pe varietatea riemanniană M. Cum fibrarea $S = S(M)$ este o fibrare Dirac, putem considera operatorul Dirac corespunzător $\mathbf{D} :\Gamma(S) \to \Gamma(S)$, dat prin formula:

$$\mathbf{D}\sigma = \sum_{i=1}^n e_i.\nabla_{e_i}^S\sigma, (\forall)\sigma \in \Gamma(S). \tag{8.37}$$

Acest operator Dirac se numeşte *operatorul Atiyah-Singer.* În anul 1963, Lichnerowicz a demonstrat [19] următoarea:

Teorema 5 (Formula lui Lichnerowicz). *Fie M o varietate spinorială şi $S = S(M)$ o fibrare spinorială. Atunci are loc formula:*

$$\mathbf{D}^2 = \nabla^{S*}\nabla^S + \frac{k}{4}, \tag{8.38}$$

$k : M \to \mathbf{R}$ fiind funcţia curbură scalară.

$$k = -\sum_{i,j=1}^n < R_{e_i e_j}e_i, e_j >, \tag{8.39}$$

iar $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortonormat de repere definit local pe M.

Demonstraţie. Vom folosi formula lui Bochner (6.23) şi expresiile (6.22), (8.31. Trebuie demonstrat că $\mathcal{R} = \frac{k}{4}$. Avem succesiv:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} e_i.e_j.R^S_{e_ie_j} = \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l=1}^{n} < R_{e_ie_j}e_k, e_l > e_ie_je_ke_l. =$$
$$= \frac{1}{8}\sum_l [\frac{1}{3}\sum_{\substack{i,j,k \\ dist.}}(< R_{e_ie_j}e_k, e_l > + < R_{e_je_k}e_i, e_l > +$$
$$+ < R_{e_ke_i}e_j, e_l >)e_ie_je_k.+$$
$$\sum_{i,j} < R_{e_ie_j}e_i, e_l > e_ie_je_i. + \sum_{i,j} < R_{e_ie_j}e_j, e_l > e_ie_je_i.]e_l.$$

Identitatea lui Bianchi ne permite să scriem acum:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4}\sum_{i,j,l} < R_{e_ie_j}e_i, e_l > e_je_l. =$$
$$= \frac{1}{4}(\sum_{\substack{i \\ j<l}} < R_{e_ie_j}e_i, e_l > e_je_l. + \sum_{\substack{i \\ j>l}} < R_{e_ie_j}e_i, e_l > e_je_l.+$$
$$+ \sum_{i,j} < R_{e_ie_j}e_i, e_j > e_j^2.) =$$
$$= \frac{1}{4}(\sum_{\substack{i \\ j<l}} < R_{e_ie_j}e_i, e_l > e_je_l. + \sum_{\substack{i \\ j<l}} < R_{e_ie_l}e_i, e_j > e_le_j.-$$
$$- \sum_{i,j} < R_{e_ie_j}e_i, e_j >) = \frac{k}{4}.\square$$

În finalul acestui paragraf, vom observa că operatorul Atiyah Singer este invariant la schimbările conforme de metrică.

În adevăr, în paragraful precedent am examinat modul în care se schimbă derivarea covariantă spinorială şi am dedus formula (8.36). Utilizând aceleaşi notaţii, să considerăm $\mathbf{D}$, respectiv $\widetilde{\mathbf{D}}$ operatorul Atiyah Singer al varietăţii spinoriale M, respectiv $\widetilde{M}$, cele două varietăţi riemanniene fiind presupuse conform echivalente, cu metricile g, respectiv $\widetilde{g}$, care verifică relaţia (8.32). Se deduce atunci din (8.36) formula:

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \psi_\mu \circ \{\mathbf{D} + \frac{1}{2}(n-1)grad(h)\} \circ \psi_\mu^{-1}. \tag{8.40}$$

Se demonstrează că oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M), X \in \mathcal{X}(M), \sigma \in \Gamma(S)$ operatorul Atyiah-Singer $\mathbf{D}$ verifică formula:

$$\mathbf{D}(f\sigma) = f\mathbf{D}\sigma + gradf.\sigma. \tag{8.41}$$

Formula (8.41) implică oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}, h \in \mathcal{F}(M), \sigma \in \Gamma(S)$:

$$\mathbf{D}(\exp(\alpha h)\sigma) = \exp(\alpha h)[\mathbf{D}\sigma + \alpha grad(h)]\sigma.$$

Ca urmare, notând $\Psi = \exp(-\frac{n-1}{2}h)\psi_\mu$, avem:

$$\Psi \circ \mathbf{D} \circ \Psi^{-1} = \exp((-\frac{n-1}{2}h)\psi_\mu \circ \mathbf{D} \circ \exp(\frac{n-1}{2}h)\psi_\mu^{-1} =$$
$$\psi_\mu \circ [\mathbf{D} + \frac{1}{2}(n-1)grad(h)] \circ \psi_\mu^{-1} = \widetilde{\mathbf{D}}.$$

Acest rezultat are consecinţe importante. Una dintre ele este că:

$$\dim\ker \mathbf{D} = \dim\ker \widetilde{\mathbf{D}}.$$

Exemple

Pentru început, vom scrie operatorul Dirac pe spaţiul hiperbolic $\mathbf{H}^n$, dotat cu metrica Poincaré. În sistemul de coordonate:

$$z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \mid x = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, y > 0\},$$

metrica hiperbolică g se exprimă prin formula:

$$g = \frac{1}{y^2}[\sum_{i=1}^{n-1}(dx_i)^2 + dy^2]. \tag{8.42}$$

Considerăm pe $\mathbf{H}^n$ câmpul ortonormat de repere:

$$\{E_1, ..., E_{n-1}, E_n\}, E_i(z) = y\frac{\partial}{\partial x_i}, E_n(z) = y\frac{\partial}{\partial y}, (\forall)i = 1, ..., n-1.$$

Dacă ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii considerate, deducem $(\forall)i, j \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\begin{gathered}\nabla_{E_i}E_j = \delta_{ij}E_n, \nabla_{E_i}E_n = -\delta_{ij}E_j \\ \nabla_{E_n}E_i = 0, \nabla_{E_n}E_n = 0.\end{gathered}$$

Notând ca de obicei, $\nabla_{E_i}E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$, avem $(\forall)i, j, k \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\begin{gathered}\Gamma_{in}^j = -\delta_{ij}, \Gamma_{ij}^n = \delta_{ij}, \Gamma_{ij}^k = 0, \Gamma_{in}^n = 0, \\ \Gamma_{ni}^j = 0, \Gamma_{ni}^n = 0, \Gamma_{nn}^i = 0, \Gamma_{nn}^n = 0.\end{gathered}$$

Fie acum $S = S(\mathbf{H}^n)$ o fibrare spinorială şi $\sigma \in \Gamma(S)$ o secţiune arbitrară. Notăm cu ∇^S derivarea covariantă indusă de conexiunea Levi-Civita a metricii (8.42). Atunci, utilizând formula (8.27) deducem oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{gathered}\nabla_{E_i}^S\sigma = \sigma_*(E_i) + \omega'(E_i)\sigma = \\ = y\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\delta_{ik}e_k e_n.\sigma - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\delta_{ik}e_n e_k.\sigma = \\ = y\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} + \frac{1}{2}e_i e_n.\sigma, \\ \nabla_{E_n}^S\sigma = y\frac{\partial\sigma}{\partial y}\end{gathered} \tag{8.43}$$

unde $\{e_1, ..., e_n\}$ este baza canonica a lui $\mathbf{R}^n$.

Din formula (8.43) deducem expresia locală a operatorului Atiyah-Singer pe $\mathbf{H}^n$:

$$\begin{gathered}\mathbf{D}\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} e_i.\nabla_{E_i}^S\sigma + e_n.\nabla_{E_n}^S\sigma = \\ \sum_{i=1}^{n-1} e_i.(y\frac{\partial\sigma}{\partial x_j} + \frac{1}{2}e_i e_n.\sigma) + ye_n.\frac{\partial\sigma}{\partial y}.\end{gathered}$$

Vom da acum expresia locală a operatorului Atiyah-Singer pe sfera unitate $\mathbf{S}^n$ din $\mathbf{R}^{n+1}$. Proiecţia stereografică este un difeomorfism între sfera unitate $\mathbf{S}^n$ *fără polul Nord* $\mathbf{N}$ şi $\mathbf{R}^n$. Mai mult, considerăm pe $\mathbf{S}^n$ metrica standard g, definită local pe $\mathbf{S}^n \backslash \{\mathbf{N}\}$ prin formula:

$$g = \left(\frac{1}{1+ \| x \|^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2. \tag{8.44}$$

Fie câmpul ortonormat de repere $\{E_1, ..., E_n\}$ definit pe $\mathbf{S}^n \backslash \{\mathbf{N}\}$ prin:

$$E_i(x) = (1 + \|x\|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}, (\forall) i \in \{1, ..., n\}.$$

Un calcul simplu arată că, notând cu ∇ conexiunea Levi-Civita a metricii g, deducem:

$$(\nabla_{E_i} E_j)(x) = 2 \sum_{k=1}^{n} (x_k \delta_{ij} - x_j \delta_{ik}) E_k(x).$$

Avem atunci:

$$\Gamma_{ij}^k = 2(x_k \delta_{ij} - x_j \delta_{ik}), (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\},$$

unde am notat, ca de obicei, $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$.

Rezultă, folosind formula (8.27):

$$\nabla_{E_i}^S \sigma = (1+ \| x \|^2) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + e_i x.\sigma, (\forall) i \in \{1, ..., n\},$$

de unde:

$$\mathbf{D}\sigma = (1+ \| x \|^2)\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} - \frac{1}{1+ \| x \|^2} x.\sigma\right).$$

O teoremă de tip Bochner

Se numeşte *spinor* orice secţiune $\sigma \in \Gamma(S)$. Se numeşte *spinor armonic* un spinor σ care verifică *ecuaţia* $\mathbf{D}\sigma = 0$.

Teorema 6 (A. Lichnerowicz). *Fie M o varietate spinorială, compactă, cu curbura scalară k strict pozitivă şi $S = S(M)$ o fibrare spinorială. Atunci orice spinor armonic este nul.*

Aceeaşi concluzie se păstrează dacă curbura scalară k este nenegativă, dar există un punct din M în care ea este strict pozitivă. [19]

Demonstraţie. Fie $\sigma \in \Gamma(S)$ un spinor armonic. Formula (8.38) a lui Lichnerowicz ne conduce la egalitatea:

$$< \nabla^{S*} \nabla^S \sigma, \sigma > + \frac{k}{4} < \sigma, \sigma > = 0,$$

sau, prin integrare pe varietatea compactă M :

$$(\nabla^S\sigma, \nabla^S\sigma) = -\frac{1}{4}\int_M k < \sigma, \sigma > . \tag{8.45}$$

În ipotezele în care ne-am situat, egalitatea (8.45) nu poate avea loc decât dacă ambii săi membri sunt nuli, ceea ce conduce la:

$$\nabla^S\sigma = 0, \int_M k < \sigma, \sigma >= 0. \tag{8.46}$$

Deci spinorul armonic σ este paralel, cum rezultă din prima relaţie (8.46). Rezultă atunci, utilizând proprietatea (6.3) a fibrării Dirac $S = S(M)$:

$$X < \sigma, \sigma >= 2 < \nabla^S\sigma, \sigma >= 0$$

oricare ar fi câmpul de vectori $X \in \mathcal{X}(M)$. Ca urmare, $< \sigma, \sigma >= const.$

Presupunem $k > 0$. Dacă spinorul armonic σ ar fi nenul, ar rezulta $\int_M k < \sigma, \sigma >> 0$, ceeace contrazice a doua relaţie (8.46). Deci $\sigma = 0$.

Rezultatul se păstrează dacă scalarul de curbură $k \geq 0$, dar există un punct $x_0 \in M$ cu proprietatea $k(x_0) > 0$.□

Are loc:

Corolar 7. *Fie M o varietate spinorială, compactă cu curbura scalară k nulă. Atunci orice spinor armonic este global paralel.*

Valori proprii ale operatorului D

Dacă varietatea Riemann spinorială M este compactă, spectrul operatorului Atiyah-Singer $\mathbf{D}$, conţine numai valori proprii reale discrete de ordin de multiplicitate finit [24], deoarece este eliptic şi formal autoadjunct. Mai mult, dacă varietatea M este compactă, de dimensiune pară, spectrul lui $\mathbf{D}$ este simetric cu zero.

Dacă $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, atunci oricare ar fi $\sigma \in \Gamma(S)$ are loc egalitatea (8.41), unde $gradf = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i$. Are loc de asemenea formula (8.38) a lui Lichnerowicz, unde k este curbura scalară a lui (M, g), iar Δ^S operatorul Bochner-Laplace al conexiunii spinoriale ∇^S :

$$\Delta^S = \nabla^{S*} \circ \nabla^S = -\sum_{i=1}^n [\nabla^S_{e_i}\nabla^S_{e_i} + div(e_i)\nabla^S_{e_i}].$$

Fie $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ o funcţie şi $\nabla^f : \Gamma(S) \to \Gamma(TM \otimes S)$ derivarea covariantă metrică definită pe S prin formula:

$$\nabla^f_X\sigma = \nabla^S_X\sigma + fX.\sigma, (\forall)X \in \mathcal{X}(M), \sigma \in \Gamma(S).$$

Teorema 8. *Formula (8.38) a lui Lichnerowicz se generalizează sub forma* [8] :

$$(\mathbf{D}-f)^2 = \Delta^f + \frac{1}{4}k + (1-n)f^2 \tag{8.47}$$

unde Δ^f *este operatorul Bochner - Laplace ar derivării covariante* ∇^f.

Demonstrație. Avem:

$$(\mathbf{D}-f)^2\sigma = \mathbf{D}^2\sigma - \mathbf{D}(f\sigma) - f\mathbf{D}\sigma + f^2\sigma, (\forall)\sigma \in \Gamma(S),$$

sau, utilizând (8.41):

$$(\mathbf{D}-f)^2\sigma = \mathbf{D}^2\sigma - 2f\mathbf{D}\sigma - (gradf).\sigma + f^2\sigma.$$

Formula (8.38) a lui Lichnerowicz implică:

$$(\mathbf{D}-f)^2\sigma = \Delta^S\sigma + \frac{1}{4}k\sigma - 2f\mathbf{D}\sigma - gradf.\sigma + f^2\sigma.$$

Aplicând formula (8.41), deducem:

$$\Delta^f\sigma = \Delta^S\sigma - 2f\mathbf{D}\sigma - gradf.\sigma + nf^2\sigma.\square$$

Din teorema 8, rezultă următorul corolar privind spectrul operatorului Dirac pe o varietate compactă:

Corolar 9. [8] *Fie* (M, g) *o varietate Riemanniană compactă, de dimensiune* n, *cu curbura scalară* $k > 0$. *Atunci:*

i) cea mai mică valoare proprie pozitivă λ_+, *respectiv cea mai mare valoare proprie negativă* λ_- *a operatorului Dirac* $\mathbf{D}$ *satisfac inegalitatea:*

$$|\lambda_\pm| \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0 n}{n-1}},$$

unde k_0 *este minimul curburii scalare* k.

ii) Dacă $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0 n}{n-1}}$ *sau* $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0 n}{n-1}}$ *este valoare proprie pentru operatorul Dirac* $\mathbf{D}$, *iar* σ *este spinorul propriu corespunzător, atunci* σ *satisface ecuația diferențială:*

$$\nabla_X\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0 n}{n-1}}X.\sigma = 0$$

respectiv:

$$\nabla_X\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0 n}{n-1}}X.\sigma = 0,$$

oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstrație. Presupunem că λ este valoare proprie a lui $\mathbf{D}$, cu proprietatea: $\lambda^2 \leq \frac{1}{4}\frac{k_0 n}{n-1}$, iar $\sigma \neq 0$ este un spinor propriu corespunzător valorii proprii λ.

Din formula (8.47) şi ţinând cont de următoarea proprietate a operatorului Bochner- Laplace:

$$\int_M < \Delta^{\frac{\lambda}{n}}\sigma, \sigma > dM = \int_M \mid \nabla^{\frac{\lambda}{n}}\sigma \mid^2 dM.$$

rezultă prin integrare pe M, considerând $f = \frac{\lambda}{n}$:

$$0 = \int_M [(\frac{1}{4}k + \frac{1-n}{n}\lambda^2) \mid \sigma \mid^2 + \mid \nabla^{\frac{\lambda}{n}}\sigma \mid^2] dM \tag{8.48}$$

Dacă $\lambda^2 \leq \frac{1}{4}\frac{k_0 n}{n-1}$, din (8.48) deducem $\sigma = 0$, ceeace este fals, deci am demonstrat afirmaţia *i)*

Dacă $\lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{k_0 n}{n-1}$, rezultă că $\nabla^{\frac{\lambda}{n}}\sigma = 0$, ceeace demonstrează *ii)*.□

Fie (M, g) o varietate riemanniană, spinorială, compactă, conexă, de dimensiune $n \geq 3$. În [15], O. Hijazi a demonstrat că dacă λ este valoare proprie a operatorului Dirac $\mathbf{D}$, atunci

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1 \geq \frac{n}{4(n-1)}k_0,$$

unde μ_1 este prima valoare proprie a laplacianului scalar conform:

$$L = 4\frac{n-1}{n-2}\Delta + k.$$

Ecuaţia twistor

Fie (M, g) o varietate Riemann, spinorială, de dimensiune n. Vom utiliza notaţiile anterioare.

Vom spune că $\sigma \in \Gamma(S)$ este un *twistor-spinor* dacă şi numai dacă σ satisface aşa numita *ecuaţie twistor:*

$$\nabla^S_X\sigma + \frac{1}{n}X.\mathbf{D}\sigma = 0 \tag{8.49}$$

oricare ar fi $X \in \mathcal{X}(M)$.

Are loc [4]

Teorema 10. *Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

i) σ este twistor-spinor;

ii) oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, are loc egalitatea:

$$X.\nabla^S_Y\sigma + X.\nabla^S_X\sigma = \frac{2}{n}g(X, Y)\mathbf{D}\sigma; \tag{8.50}$$

iii) $X.\nabla^S_X\sigma$ nu depinde de câmpul vectorial unitar X.

Demonstrație. Presupunând că $\sigma \in \Gamma(S)$, este twistor-spinor, vom arăta că are loc *ii)*. Oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, avem simultan:

$$\begin{aligned} &Y.\nabla^S_X\sigma + \tfrac{1}{n}YX.\mathbf{D}\sigma = 0 \\ &X.\nabla^S_Y\sigma + \tfrac{1}{n}XY.\mathbf{D}\sigma = 0. \end{aligned} \tag{8.51}$$

Se știe că $XY + YX = -2g(X,Y)Id_S$, deci adunând membru cu membru cele două egalități (8.51), obținem (8.50), ceea ce probează implicația $i) \to ii)$.

Reciproc, $ii) \to i)$. În adevăr, egalitatea (8.50) se scrie, dacă $X = Y$:

$$X.\nabla^S_X\sigma = \frac{1}{n}g(X,X)\mathbf{D}\sigma.$$

Multiplicând cu X, deducem (8.49), deoarece $X^2 = -g(X,X).Id_S$.

Demonstrăm acum implicația $i) \to iii)$. Pentru X câmp vectorial unitar, din ecuația twistor (8.49), deducem prin multiplicare cu X :

$$X.\nabla^S_X\sigma = \frac{1}{n}\mathbf{D}\sigma, (\forall)X \in \mathcal{X}(M),$$

deci $i) \to iii)$.

Reciproc, $iii) \to i)$. În adevăr, să considerăm $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortonormal local de repere pe M. Din ipoteza $iii)$, deducem:

$$e_1.\nabla^S_{e_1}\sigma = ... = e_n.\nabla^S_{e_n}\sigma =^{not} \psi.$$

Pe de altă parte, rezultă:

$$\mathbf{D}\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_i.\nabla^S_{e_i}\sigma = n\psi,$$

adică $\psi = \frac{1}{n}\mathbf{D}\sigma$. Ca urmare, avem:

$$\nabla^S_{e_k}\sigma = -\frac{1}{n}e_k.\mathbf{D}\sigma, (\forall)k \in \{1, ..., n\}. \tag{8.52}$$

Fie acum $X = \sum X^k e_k \in \mathcal{X}(M)$. Din (8.52), deducem:

$$\sum_{k=1}^{n} X^k\nabla^S_{e_k}\sigma = -\frac{1}{n}X.\mathbf{D}\sigma,$$

ceeace implică ecuația twistor (8.49).□

În continuare, vom da exemple de twistori-spinori.

Este util de amintit mai întâi comportarea operatorului Dirac la o transformare conformă a metricii.

Fie (M,g) varietatea riemanniană spin și $\tilde{g} = \exp(2h)g$, $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ o metrică conform echivalentă cu metrica g. Presupunem S, respectiv

$\widetilde{S}$ fibrări spinoriale corespunzătoare varietăţii Riemann (M, g) respectiv $(M, \widetilde{g})$. Observăm că oricărui câmp de repere $\{e_1, ..., e_n\}$ definit local pe M, ortonormat în raport cu metrica g îi corespunde câmpul de repere $\{\widetilde{e_1}, ..., \widetilde{e_n}\}$ ortonormat în raport cu metrica $\widetilde{g}$, unde $\widetilde{e}_k = \exp(-h)e_k, (\forall)k \in \{1, ..., n\}$. Această observaţie ne permite să identificăm fibrarea spinorială S cu fibrarea spinorială $\widetilde{S}$ prin identificarea " $\sim$ " cu următoarele proprietăţi:

$$\widetilde{X} = \exp(-h)X, (\forall)X \in \Gamma(TM) \tag{8.53}$$

$$\widetilde{X}.\widetilde{\sigma} = \widetilde{X.\sigma}, (\forall)X \in \Gamma(TM), \sigma \in \Gamma(S) \tag{8.54}$$

$$\nabla^{\widetilde{S}}_{\widetilde{X}}\widetilde{\sigma} = \sigma^{-1/2}\widetilde{\nabla^{S}_{X}\sigma} + \frac{1}{2}X.grad(\widetilde{\exp}(-h)).\sigma + \frac{1}{2}X(\exp(-h))\widetilde{\sigma}. \tag{8.55}$$

Propoziţia 11. *Secţinea* $\sigma\in \Gamma(S)$ *este twistor-spinor pe* (M, g) *dacă şi numai dacă* $(\exp\frac{1}{2}h)\sigma \in \Gamma(\widetilde{S})$ *este twistor-spinor pe* $(M, \widetilde{g})$.

Demonstraţie. Are loc egalitatea:

$$\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\sigma} = (\exp -\frac{n+1}{2}h)\widetilde{\mathbf{D}(\exp \frac{\mathbf{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{h})\sigma}, (\forall)\sigma \in \Gamma(S), \tag{8.56}$$

unde D respectiv $\widetilde{\mathbf{D}}$ reprezintă operatorul Dirac al lui S respectiv $\widetilde{S}$. În adevăr, aceasta rezultă prin calcul din formulele (8.53), (8.54), (8.55).

Notăm acum

$$\mathcal{D}\sigma = \nabla^{S}_{X}\sigma + \frac{1}{n}X.\mathbf{D}\sigma$$

Când metrica g se schimbă cu metrica $\widetilde{g}$ se deduce:

$$\widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{\sigma} = (\exp -\frac{h}{2})\mathcal{D}(\widetilde{\sigma^{-1/4}\sigma}).\square$$

Pentru a putea construi unele exemple, este utilă:

Teorema 12. *Fie* $\sigma\in \Gamma(S)$ *un twistor-spinor. Se verifică atunci egalităţile:*

$$\mathbf{D}^2\sigma = \frac{n}{4(n-1)}k\sigma \tag{8.57}$$

$$\nabla^{S}_{X}(\mathbf{D}\sigma) = \frac{n}{2(n-2)}[\frac{1}{2(n-1)}kX - RicX].\sigma. \tag{8.58}$$

Demonstraţie. Alegem $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortogonal de repere, normal în punctul $x \in M$. Atunci avem aplicând ∇_{e_i} ambilor membri ai ecuaţiei (8.49), în care se ia $X = e_i$ şi sumând după i:

$$-\Delta^{S}\sigma + \frac{1}{n}\mathbf{D}^2\sigma = 0.$$

Din formula (8.38) a lui Lichnerowicz, rezultă atunci (8.57).

Mai departe, din ecuaţia twistor, considerând câmpul vectorial X paralel, avem:

$$\begin{array}{l}\nabla^S_{e_j}\nabla^S_X\sigma+\frac{1}{n}X.\nabla^S_{e_j}(\mathbf{D}\sigma)=0\\ \nabla^S_X\nabla^S_{e_j}\sigma+\frac{1}{n}e_j.\nabla^S_X(\mathbf{D}\sigma)=0\end{array},(\forall)j\in\{1,...,n\}.$$

Prin scăderea membru cu membru a celor două egalităţi, deducem:

$$R^S_{e_jX}\sigma=\frac{1}{n}[e_j.\nabla^S_X(\mathbf{D}\sigma)-X.\nabla^S_{e_j}(\mathbf{D}\sigma)]=0,$$

relaţie din care prin înmulţire cu e_j şi sumare după indicele j, rezultă:

$$\frac{1}{2}(RicX).\sigma=-\nabla^S_X(\mathbf{D}\sigma)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e_jX.\nabla^S_{e_j}(\mathbf{D}\sigma)=0.$$

Avem însă egalitatea:

$$e_jX=-Xe_j-2g(e_j,X),$$

deci:

$$\frac{1}{2}(RicX).\sigma=-\nabla^S_X(\mathbf{D}\sigma)+X.\mathbf{D}^2\sigma+\frac{2}{n}\nabla^S_X(\mathbf{D}\sigma).$$

Utilizăm (8.57) şi deducem (8.58).□

Exemplu 1. Fie $M=\mathbf{R}^n$, cu metrica euclidiană. Dacă σ este un twistor-spinor pe $\mathbf{R}^n$, atunci conform teoremei 12, formula (8.58), rezultă $\nabla^S(\mathbf{D}\sigma)=0$, deci $\mathbf{D}\sigma=const.$ Notăm $\mathbf{D}\sigma=\sigma_1=const.$ Integrăm ecuaţia twistor (8.49), care se scrie acum:

$$\nabla^S_X\sigma+\frac{1}{n}X.\sigma_1=0,$$

de-a lungul segmentului $\{tx\mid 0\le t\le 1\}$ şi obţinem:

$$\sigma(x)-\sigma(0)=-\frac{1}{n}x\sigma_1.$$

Deci, *mulţimea twistor-spinorilor spaţiului euclidian* $\mathbf{R}^n$ este:

$$\{\sigma\in\Gamma(S)\mid\sigma(x)=\sigma_0-\frac{1}{n}x\sigma_1,\sigma_0,\sigma_1-const.\}.$$

Exemplu 2. Fie sfera S^n dotată cu metrica standard g_0. Identificăm prin proiecţia stereografică sfera S^n, din care se scoate polul nord N, cu spaţul euclidian $\mathbf{R}^n$. Metricele g_0 şi $g_{\mathbf{R}^n}$ sunt conform echivalente, anume:

$$g_0=\frac{4}{(1+\parallel x\parallel^2)^2}g_{\mathbf{R}^n}. \tag{8.59}$$

Din Propoziţia 11 şi din exemplul 1, rezultă că singurii twistori-spinori σ pe $S^n\backslash\{N\}$ sunt de forma:

$$\sigma(x)=\frac{\sigma_0+x\sigma_1}{(1+\parallel x\parallel^2)^{1/2}},\sigma_0,\sigma_1 const. \tag{8.60}$$

Exemplu 3. Fie spaţiul hiperbolic $\mathbf{H}^n$, realizat ca discul unitate deschis din $\mathbf{R}^n$, cu metrica:

$$g = \frac{4}{(1 - \| x \|^2)^2} g_{\mathbf{R}^n}. \tag{8.61}$$

Ca şi în exemplul 2, rezultă că singurii twistori-spinori σ pe $\mathbf{H}^n$ sunt de forma:

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_0 + x\sigma_1}{(1 - \| x \|^2)^{1/2}}, \sigma_0, \sigma_1 const.$$

Spinori Killing

Un câmp de spinori $\sigma \in \Gamma(S)$ se numeşte *spinor Killing cu numărul Killing* $\lambda \in \mathbf{C}$ dacă şi numai dacă este satisfăcută ecuaţia [4]:

$$\nabla^S_X \sigma = \lambda X.\sigma, (\forall) X \in \mathcal{X}(M). \tag{8.62}$$

Este de observat că orice spinor Killing σ, cu numărul Killing λ satisface ecuaţia:

$$\mathbf{D}\sigma = -n\lambda\sigma,$$

şi, ca urmare, este twistor-spinor deoarece satisface ecuaţia (8.49).

Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ un câmp ortonormat de repere definit local pe varietatea spinorială M. Avem:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i.\mathcal{R}^S_{Xe_i}\sigma = -\frac{1}{2} Ric X.\sigma, \tag{8.63}$$

oricare ar fi $\sigma \in \Gamma(S), X \in \mathcal{X}(M)$. În adevăr, din formula (8.31) deducem:

$$\begin{gathered}
\textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i.\mathcal{R}^S_{Xe_i}\sigma = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k} < R_{Xe_i}e_k, e_l > e_i e_k e_l.\sigma = \\
\textstyle\frac{1}{12}\sum_{\substack{i,j,k \\ dist.}} [< R_{Xe_i}e_k, e_l > + < R_{Xe_k}e_l, e_i > + < R_{Xe_l}e_i, e_k >] e_i e_k e_l.\sigma + \\
\textstyle -\frac{1}{4}[\sum_{i,l} < R_{Xe_i}e_i, e_l > e_l + \sum_{i,k} < R_{Xe_i}e_k, e_i > e_k].\sigma
\end{gathered}$$

Identitatea Bianchi implică atunci (8.63).

Există o condiţie fundamentală ce se impune varietăţii Riemann (M, g) pentru ca ea sa posede spinori Killing.

Teorema 13. *Fie (M, g) o varietate Riemnn, conexă, ce admite structură spinorială. Dacă există $\sigma \in \Gamma(S)$ un spinor Killing nenul cu numărul Killing λ, atunci (M, g) este spaţiu Einstein cu curbura scalară $k = 4n(n-1)\lambda^2$.*

Demonstraţie. Oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M), \sigma \in \Gamma(S)$ avem:

$$R^S_{XY}\sigma = \nabla^S_X \nabla^S_Y \sigma - \nabla^S_Y \nabla^S_X \sigma - \nabla^S_{[X,Y]}\sigma,$$

ceea ce implică, deoarece σ este spinor Killing:

$$R^S_{XY}\sigma = 2\lambda^2(YX - XY).\sigma = 2\lambda^2(YX + g(X,Y)).\sigma.$$

Rezultă din (8.63) că:

$$(RicX).\varphi = -2\sum_{i=1}^{n} e_i.R^S_{Xe_i}\varphi = 4\lambda^2(n-1)X.\sigma.$$

Cum $\sigma \neq 0$, deducem:

$$RicX = 4\lambda^2(n-1)X,$$

deci (M, g) este spaţiu Einstein cu curbura scalară $k = 4\lambda^2 n(n-1)$.

Este important de observat că:

i) curbura scalară k este strict pozitivă dacă şi numai dacă λ este număr real, nenul;

ii) curbura scalară k este strict negativă dacă şi numai dacă λ este număr pur imaginar, nenul;

iii) curbura scalară k este nulă dacă şi numai dacă λ este nul.

Vom spune că spinorul Killing σ nenul ce corespunde lui $\lambda \in \mathbf{C}$, este *spinor Killing real* dacă $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ şi este *spinor Killing imaginar* dacă $\lambda \in \mathbf{iR}\setminus\{0\}$.

Ca urmare, se reliefează un aspect topologic important:

Teorema 14. *Fie (M, g) o varietate spin, completă, conexă, cu un spinor Killing, nenul.*

i) Dacă σ este real, atunci (M, g) este spaţiu Einstein, compact, cu curbura scalară pozitivă.

ii) Dacă σ este imaginar, atunci (M, g) este spaţiu Einstein, necompact, cu curbura scalară negativă.

Demonstraţie. Fie σ spinor Killing nenul, real. Atunci, din teorema 13 rezultă că (M, g) este spaţiu Einstein, cu curbura scalară pozitivă şi teorema lui Myers [17] ne asigură că varietatea M este compactă .

Fie acum σ spinor Killing nenul, imaginar, ce corespunde lui $\mathbf{i}\lambda, \lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Atunci avem egalitatea:

$$\mathbf{D}^2\sigma = -n^2\lambda^2\sigma$$

Presupunem că varietatea M este compactă. Integrând avem:

$$0 \le \int_M < \mathbf{D}\sigma, \mathbf{D}\sigma > dM = \int_M < \mathbf{D}^2\sigma, \sigma > dM =$$
$$= -n^2\lambda^2 \int_M < \sigma, \sigma > dM \le 0,$$

ceea ce implică $\sigma = 0$, care este fals.□

Observăm că spinorii Killing reali, nenuli sunt definiţi numai pe varietăţi compacte cu curbura scalară $k > 0$, adică exact pe acele varietăţi compacte care admit valorile proprii limită pentru operatorul Dirac $\mathbf{D}$. Deducem că $\sigma \in \Gamma(S)$ este spinor propriu al operatorului Dirac $\mathbf{D}$, corespunzător uneia dintre valorile proprii limită, anume $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{n(n-1)}}$ sau $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{n(n-1)}}$, dacă şi numai dacă σ este spinor Killing nenul ce corespunde respectiv numerelor Killing $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{n(n-1)}}$ şi $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{n(n-1)}}$, unde k_0 minimul curburii scalare k.

Mai mult, se arată [4] că în cazul compact *toţi* twistor-spinorii pot fi obţinuţi din spinorii Killing printr-o deformare conformă a metricii.

Dacă (M, g) este varietate spin conexă ce admite un spinor Killing, nenul, corespunzător numărului Killing nenul $\lambda \in \mathbf{C}$, atunci se demonstrează că (M, g) este local ireductibilă. Dacă (M, g) este local simetrică sau dimensiunea sa este cel mult 4, atunci (M, g) este spaţiu cu curbura secţională constantă $4\lambda^2$.

Exemplu 4. Fie sfera S^n cu metrica sa standard g_0 dată prin formula (8.59), ca în exemplul 2 din &8.8.

Am văzut în exemplul citat că twistor-spinorii pe $S^n \backslash \{N\}$ sunt daţi prin formula (8.60). Din formula (8.55) rezultă derivata spinorială a twistor-spinorului $\tilde{\varphi}$:

$$\nabla^{\tilde{S}}_{\tilde{e}_j}\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\|x\|^2}}e_j.\widetilde{x.\sigma_0} + \sigma_1), (\forall)\sigma_0, \sigma_1 - const. \tag{8.64}$$

Presupunem acum că $\tilde{\sigma}$ este spinor Killing pe $S^n \backslash \{N\}$, deci:

$$\nabla^{S}_{\tilde{e}_j}\tilde{\sigma} = \pm\frac{1}{2}\tilde{e}_j.\tilde{\sigma}. \tag{8.65}$$

Din (8.64), (8.65), deducem:

$$\pm\,(\sigma_0 + x.\sigma_1) = x.\sigma_0 + \sigma_1, (\forall)x \in \mathbf{R}^n. \tag{8.66}$$

Deoarece pentru $x = 0$, din (8.66) deducem $\sigma_0 = \pm\sigma_1$, rezultă că pe $S^n \backslash \{N\}$ orice spinor Killing $\tilde{\sigma}$ este de forma:

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{(1 \pm x).\sigma_0}{\sqrt{1+\|x\|^2}}, \sigma_0 = const. \tag{8.67}$$

şi corespunde numărului Killing $\pm\frac{1}{2}$.

Exemplu 5. Fie spaţiul hiperbolic $\mathbf{H}^n$, realizat ca discul unitate deschis din $\mathbf{R}^n$, cu metrica g dată prin formula (8.61) ca în exemplul 3 din &8.8. Ca şi în exemplul 4 de mai sus, obţinem că spinorii Killing $\tilde{\sigma}$ pe $\mathbf{H}^n$, corespunzători numerelor Killing $\pm\frac{1}{2}\mathbf{i}$ se scriu sub forma:

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{(1 \pm \mathbf{i}x).\sigma_0}{\sqrt{1-\|\,x\|^2}}, \sigma_0 = const. \tag{8.68}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] J. F. Adams, *Lectures on Lie groups,* Benjamin-Addison Wesley, 1969.

[2] J. F. Adams, *Vector fields on spheres,* Annals of Math., 75, 3, 1962.

[3] M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, *Clifford modules,* Topology, 3, 3 - 38, 1964.

[4] Helga Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, Ines Kath, *Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds,* Teubner Texte zur Mathematik, 124, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1991.

[5] A. L. Besse, *Einstein Manifolds,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

[6] Irina Calinov, *Prolongement des structures spinorielles sur la variété des jets,* Ann. Inst. Henri Poincaré, 61, 1, 63 - 73, 1994.

[7] R. Courant, *Dirichlet principle, conformal mapping and minimal surfaces*, Interscience, 1950.

[8] Th. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry,* Graduate Studies in Mathematics, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[9] S. Gallot, D. Meyer, *Operateur de courbure et Laplacien des formes differentialles d'une variété riemannienne,* J. Math. Pures et Appl. 54, 975, 285-304.

[10] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale,* Editura Academiei, Bucureşti, 1976 (vol. I), 1979 (vol. II).

[11] J. E. Gilbert, Margaret A.M. Murray, *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 1991.

[12] M. Gromov, H.B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature,* Ann. of Math, 111, 423 - 434, 1980.

[13] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, *Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes,* Cedic-Fernand Nathan, Paris, 1981.

[14] R. Grunewald, *Six dimensional Riemannia manifolds with a real Killing spinor,* Ann. Global Anal. Geom. 8, 1, 43-59, 1990.

[15] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors,* Comm. Math. Phys. 104, 151 - 162, 1986.

[16] S. Ianuş, *Geometrie diferenţială cu aplicaţii în teoria relativităţii,* Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

[17] S. Kobayashy, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, I, II,* Interscence Publishers, New York, London, 1963, 1969.

[18] H. B. Lawson, Jr., M.L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

[19] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques,* C.R. Acad. Sci. Paris, 257, 7 - 9, 1963.

[20] J. Milnor, *Spin structures on manifolds,* L'Enseignement Math. 9, 198 - 203, 1963.

[21] J. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes,* Ann. of Math. Studies 76, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[22] D. Meyer, *Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif,* C. R. Acad. Sci. Paris, Série A-B, 272, 482-485, 1971.

[23] L. Nicolescu, *Grupuri Lie,* Ed. Universităţii, 1994.

[24] R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem,* Princeton, 1965.

[25] I. Popovici, Adriana Turtoi, *Generalized spinor structure,* Proceedings of the Conference on Clifford Algebra, its Generalizations and Applications (30 Ianuary -1st February 1972), Matscience, The Institut of Mathematical Sciences, Madras, 97 - 112.

[26] I. Popovici, Adriana Turtoi, *Prolongement des structures spinorielles,* Ann. Inst. H. Poincaré, 20, 1, 21 - 39, 1974.

[27] C. Teleman, Mihaela Teleman, *Elemente de teoria grupurilor cu aplicaţii în topologie şi fizică,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

[28] Adriana Turtoi, *Prelungirea structurilor spinoriale ale unei varietăţi de dimensiune impară,* St. Cerc. Mat., 25, 5, 773 - 783, 1973.

[29] Adriana Turtoi, *Modele geometrice ale teoriei relativităţii. Prelungirea structurilor spinoriale (*Rezumatul tezei de doctorat), Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 1972.

[30] Adriana Turtoi, *Aplicaţii ale algebrei şi geometriei în teoria spinorilor,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1989.

[31] Gh. Vrănceanu, Th. Hangan, C. Teleman, *Geometrie elementară din punct de vedere modern,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[32] K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers,* Ann. of Math Studies, 32, Princeton University Press, 1953.

[33] K. Yano, *On harmonic and Killing vector fields,* Ann. of Math. 55, 38 - 45, 1952.

[34] H. Wu, *The Bochner technique in Riemannian Geometry,* Mathematical Reports, 38 - 45, 4, 289 - 539, 1988.

C U P R I N S

57000 lei

ISBN 973-575-629-3 Lei 57000